Introdução à lógica Cezar A. Mortari



Introdução à lógica



Cezar A. Mortari



inep

IMPRENSA OFICIAL SP

Editora UNESP

Ao contrário do que pensam alguns, a lógica é uma ciência apaixonante e viva, fruto de rica história de evolução e transformação. Essa mesma história dinâmica é refletida por este livro, no qual se constrói uma rigorosa e abrangente introdução aos desenvolvimentos recentes e ao conteúdo clássico dessa ciência ilustre.

ISBN 85-7139-337-0



A lógica constitui uma das ciências que mais evoluíram e se transformaram no século XX. Deixou de englobar apenas a teoria da argumentação válida, embora esse tópico ainda faça parte significativa de seu domínio, para se converter em disciplina de índole matemática. Hoje, incluem-se na lógica temas como teoria da recursão, teoria de Galois generalizada, álgebras poliádicas, modelos e estruturas, semântica functorial, complexidade segundo Chaitin-Kolmogorov e modelos booleanos de teoria de conjuntos, os quais ilustram seu caráter matemático.

Ademais, a lógica encontrou variadas aplicações, tanto de índole teórica como de natureza tecnológica. Dentre as primeiras, merecem destaque as filosóficas, em particular em filosofia da ciência, e as relativas à própria matemática (por exemplo, a utilização de teoria de modelos em álgebra). No tocante

às segundas, mencionam-se as referentes à Inteligência Artificial (sobretudo em robótica), à engenharia de produção e à informática em geral.

Verificou-se também uma revolução no cerne da própria lógica, com o surgimento de novas lógicas, distintas da clássica, algumas complementando, outras figurando como alternativas dela.

Desempenha papel relevante em tudo isso a lógica clássica de primeira ordem. O presente livro foi concebido como introdução, aliás excelente, a essa lógica e à lógica em geral, tendo como principal motivação a teoria da inferência válida e assuntos correlatos. De fato, a obra do Prof. Cezar Mortari preenche uma lacuna em relação à literatura em língua portuguesa especializada.

Newton C. A. da Costa

Capa: Vicente Pimenta

INTRODUÇÃO À LÓGICA

CEZAR A. MORTARI

INTRODUÇÃO À LÓGICA

Esta publicação contou com o apoio do Comitê dos Produtores da Informação Educacional (COMPED) e teve sua reprodução contratada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), no âmbito do Programa Publicações de Apoio à Formação Inicial e Continuada de Professores.

comped COMITÊ DOS PRODUTORES DA INFORMAÇÃO EDUCACIONAL

inep Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais

IMPRENSA OFICIAL

Editora UNESP

Direitos de publicação reservados à:

Fundação Editora da UNESP (FEU)
Praça da Sé, 108
01001-900 - São Paulo - SP
Tel.: (0xx11) 232-7171 Fax: (0xx11) 232-7172
Home page: www.editora.unesp.br
E-mail: feu@editora.unesp.br

Imprensa Oficial do Estado S. A.
Rua da Mooca, 1921
03103-902 - São Paulo - SP
Tel.: (0xx11) 6099-9446 Fax: (0xx11) 6692-3503
SAC 0800 123401
Home page: www.imprensaoficial.com.br
E-mail: imprensaoficial@imprensaoficial.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mortari, Cezar A.
Introdução à lógica / Cezar A. Mortari. - São Paulo: Editora UNESP: Imprensa Oficial do Estado, 2001.

Bibliografia.
ISBN 85-7139-337-0

1. Lógica 2. Filosofia I. Título. II. Série.

01-0819 CDD-160

Índice para catálogo sistemático:
1. Lógica: Filosofia 160

Editora afiliada:


Asociación de Editoriales Universitarias de America Latina y el Caribe


Associação Brasileira de Editoras Universitárias



Para Stefan e Mathias

AGRADECIMENTOS

Este livro surgiu de textos redigidos para as minhas aulas de lógica no curso de graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina. Agradeço às inúmeras pessoas que leram as diferentes versões do livro em várias ocasiões e sugeriram vários aperfeiçoamentos. Seria impossível nomear todas elas, mas agradeço em especial aos estudantes da filosofia, que sofreram durante as versões preliminares do livro, e que mesmo assim me encorajaram a melhorá-lo.

Gostaria de agradecer também, pela leitura atenta, e pelas inúmeras sugestões e correções, a Luiz Henrique de Araújo Dutra, Antonio Mariano Nogueira Coelho, Marco Antonio Figueiredo Menezes e Roberta Pires de Oliveira. Um agradecimento em particular ao grande amigo Luiz Henrique Dutra, que sempre me incentivou — entre outras coisas, a publicar de uma vez este livro, e partir para o próximo. (*May the Force be with you, Luiz Henrique!*)

Finalmente, um agradecimento especial à minha esposa, Daniela, cujo amor, carinho e apoio nunca faltaram nesses anos todos.

Tübingen, junho de 2000

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo inicial, procuraremos caracterizar o que é a lógica e do que ela se ocupa. Trataremos de coisas como raciocínio, inferência e argumento, e de o que a lógica tem a ver com tudo isto.

1.1 O que é lógica?

Apresentar a quem se inicia no estudo de alguma disciplina uma definição precisa dela é uma tarefa certamente difícil. (Por exemplo, como você definiria a física?) Geralmente uma ciência (como a física) tem tantas facetas e especialidades que toda definição termina por ser injusta, ou por deixar de lado aspectos importantes, ou ainda por dar margem a que se incluam coisas que, na verdade, não pertencem à disciplina em questão. Além do mais, as ciências evoluem, novas especialidades surgem, e as fronteiras entre elas geralmente estão longe de ser nítidas. Dessa forma, assim como é difícil dar uma definição impecável do que seja a física, a química ou a matemática, o mesmo acontece com a lógica.

Em vista disso, seria fácil, neste primeiro momento, cair na tentação de dizer a um principiante algo como: "Lógica é aquilo que os lógicos fazem, e ponto final". Ou então: "Leia o presente livro; ao final dele você vai ter uma idéia do que é a lógica". Contudo, isso

obviamente não esclarece muita coisa, e, uma vez que este texto pretende ser uma introdução ao assunto, seria apropriado começar com uma idéia inicial, ainda que não muito precisa, daquilo que estamos introduzindo. Portanto, para encurtar a conversa e ter um ponto de partida, ainda que provisório, vamos dizer o seguinte:

> LÓGICA é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência, tendo o objetivo principal de determinar em que condições certas coisas se seguem (são conseqüência), ou não, de outras.

Obviamente, como definição, isso deixa bastante a desejar: precisamos explicitar o que é "inferência", por exemplo, e o que se quer dizer com "se seguem" ou "conseqüência", e que "coisas" estão aí envolvidas. Isso é o que vamos tentar esclarecer no decorrer deste e do próximo capítulo.

1.2 Raciocínio e inferência

Vamos começar com o problema apresentado no seguinte miniconto de fadas:

> Há não muito tempo atrás, num país distante, havia um velho rei que tinha três filhas, inteligentíssimas e de indescritível beleza, chamadas Guilhermina, Genoveva e Griselda. Sentindo-se perto de partir desta para melhor, e sem saber qual das filhas designar como sua sucessora, o velho rei resolveu submetê-las a um teste. A vencedora não apenas seria a nova soberana, como ainda receberia a senha da conta secreta do rei (num banco suíço), além de um fim de semana, com despesas pagas, na Disneylândia. Chamando as filhas à sua presença, o rei mostrou-lhes cinco pares de brincos, idênticos em tudo com exceção das pedras neles engastadas: três eram de esmeralda, e dois de rubi. O rei vendou então os olhos das moças e, escolhendo ao acaso, colocou em cada uma delas um par de brincos. O teste consistia no seguinte: aquela que pudesse dizer, sem sombra de dúvida, qual o tipo de pedra que havia em seus brincos herdaria o reino (e a conta na Suíça etc.).
>
> A primeira que desejou tentar foi Guilhermina, de quem foi removida a venda dos olhos. Guilhermina examinou os brincos de suas

irmãs, mas não foi capaz de dizer que tipo de pedra estava nos seus (e retirou-se, furiosa). A segunda que desejou tentar foi Genoveva. Contudo, após examinar os brincos de Griselda, Genoveva se deu conta de que também não sabia determinar se seus brincos eram de esmeralda ou rubi e, da mesma furiosa forma que sua irmã, saiu batendo a porta. Quanto a Griselda, antes mesmo que o rei lhe tirasse a venda dos olhos, anunciou corretamente, alto e bom som, o tipo de pedra de seus brincos, dizendo ainda o porquê de sua afirmação. Assim, ela herdou o reino, a conta na Suíça e, na viagem à Disneylândia, conheceu um jovem cirurgião plástico, com quem se casou e foi feliz para sempre.

Agora, um probleminha para você resolver:

Exercício 1.1 Que brincos tinha Griselda, de esmeralda ou de rubi? Justifique sua resposta.

Aviso importante:
Como você vê, aqui está o primeiro dos muitos exercícios que se encontram espalhados ao longo da aprendizagem da lógica. Da mesma maneira que aprender matemática, aprender lógica envolve a realização de exercícios, sem o que as coisas não progridem. O ideal seria que você tentasse resolver *todos* os que aparecem neste livro. Pense um pouco a respeito desse primeiro, e tente colocar suas idéias por escrito.

Já de volta? Bem, espero que você tenha feito o esforço e descoberto que os brincos de Griselda eram de *esmeralda*. Contudo, responder ao exercício dizendo apenas que os brincos eram de esmeralda não é suficiente: você pode ter tido um palpite feliz, acertando simplesmente por sorte. Para me convencer de que você sabe mesmo a resposta, você tem de expor *as razões que o/a levaram a concluir* que os brincos eram de esmeralda; você tem de *justificar* essa sua afirmação. Note que as princesas também estavam obrigadas a fazer isto: o velho rei não estava interessado em que uma delas acertasse a resposta por acaso.

Mas, antes de nos ocuparmos com a justificativa pedida, vamos conversar um pouco sobre o que aconteceu enquanto você tentava

resolver o problema. Há vários pontos de partida que você pode ter tomado, e vários caminhos que pode ter seguido. Por exemplo, você pode ter começado achando que, pela lei das probabilidades, há mais chances de que os brincos de Griselda sejam de esmeralda — afinal, há um número menor de brincos de rubi — e ter então tentado mostrar que eles são mesmo de esmeralda. Ou você pode ter procurado imaginar o que aconteceria se os brincos de Griselda fossem de rubi, e ter chegado à conclusão de que isso não poderia ter ocorrido. Ou talvez você tenha feito uma lista de todas as combinações possíveis de brincos e princesas, e tenha prosseguido eliminando sistematicamente aquelas combinações que contrariavam os dados do problema. Seja lá como for, em algum lugar do seu cérebro (nas "pequenas células cinzentas", como diria Hercule Poirot) ocorreu um processo que fez com que você passasse a acreditar numa certa conclusão: os brincos de Griselda tinham que ser de esmeralda. A esse processo vamos chamar de *raciocínio*, ou de *processo de inferência*.

Basicamente, raciocinar, ou fazer inferências, consiste em "manipular" a informação disponível — aquilo que sabemos, ou supomos, ser verdadeiro; aquilo em que acreditamos — e extrair conseqüências disso, obtendo informação nova. O resultado de um processo (bem-sucedido) de inferência é que você fica sabendo (ou, ao menos, acreditando em) algo que você não sabia antes: que os brincos de Griselda são de esmeralda; que o assassino foi o mordomo; que, se você comprar este aparelho de som agora, não vai ter dinheiro para o aluguel. É claro que este processo também pode terminar num fracasso — raciocina-se em vão e não se chega a lugar nenhum —, mas esta é outra história.

Por outro lado, é importante notar que nem sempre o ponto de partida do processo são coisas sabidas, ou em que se acredita: muitas vezes raciocinamos a partir de hipóteses. Por exemplo, você pode estar interessado em saber o que acontecerá se você comprar agora o DVD-player dos seus sonhos. Raciocinando a partir daí, e com conhecimento do estado de seu bolso, você pode chegar à conclusão de que vai faltar dinheiro para o aluguel. O resultado do processo, nesse caso, não é que você fique sabendo que não há dinheiro para o aluguel, mas que *isso irá acontecer se você comprar o DVD-player*. O conhecimento novo que você obteve, no caso, é que existe uma certa

conexão entre comprar o aparelho e não poder pagar o aluguel.

É provavelmente desnecessário mencionar — mas vou fazê-lo assim mesmo — que existem outras maneiras, além de inferências, de obter informação nova. Por exemplo, você pode ter lido na primeira página do jornal de hoje que os brincos de Griselda são de esmeralda. Ou talvez sua namorada (ou namorado) tenha lhe contado isso, e você acredita sistematicamente em tudo o que ela (ele) diz. Em qualquer um destes casos, você passou a acreditar que os brincos de Griselda são de esmeralda sem se ter dado ao trabalho de raciocinar. Freqüentemente, contudo, obtemos informação executando inferências, ou seja, raciocinando, e é aqui que o interesse da lógica se concentra.

Uma vez que o processo de raciocínio acontece no cérebro das pessoas, ele é um processo mental. Exatamente *como* este processo se desenrola não se sabe ainda ao certo. Habitualmente não tomamos consciência de que estamos raciocinando, nem do modo de funcionar desse processo. Muitas vezes não sabemos nem mesmo explicar como chegamos a alguma conclusão; o processo parece se dar de modo mais ou menos inconsciente. Costumamos falar em "ter um estalo", e atinar de repente com a resposta a algum problema que nos preocupa: é como se o subconsciente continuasse funcionando, e, de repente, quase que por mágica, chegamos a alguma solução. Para dar um exemplo: você certamente conhece a velha lenda sobre como Isaac Newton descobriu a Lei da Gravitação Universal. Conta-se que, estando Sir Isaac sentado a dormitar à sombra de uma frondosa macieira, caiu-lhe à cabeça uma maçã, e ele teve uma visão: os astros se movendo no cosmo, as maçãs (e os aviões) que caem, tudo está sujeito à força da gravidade. Há vários exemplos desse tipo pela história da ciência afora: para citar mais um, Friedrich Kekulé, o proponente da estrutura química dos anéis benzênicos, teve sua inspiração ao observar como chamas na lareira pareciam formar círculos — ou, segundo outras fontes, ao sonhar com uma serpente engolindo sua própria cauda.

É claro que muitas vezes temos plena consciência de que estamos envolvidos num raciocinar, e isto também costuma exigir um certo esforço (o que você deve ter descoberto tentando resolver o exercício acima).

Mas, enfim, aconteça consciente ou inconscientemente, o raciocínio é um processo mental. Porém, não é de interesse da lógica investigar *como* esse processo ocorre: ainda que a lógica muitas vezes seja caracterizada como a "ciência do raciocínio", ela não se considera de modo algum parte da psicologia. A lógica não procura dizer como as pessoas raciocinam (mesmo porque elas "raciocinam errado" muitas vezes), mas se interessa primeiramente pela questão de se aquelas coisas que sabemos ou em que acreditamos — o ponto de partida do processo — de fato constituem uma boa razão para aceitar a conclusão alcançada, isto é, se a conclusão é uma *conseqüência* daquilo que sabemos. Ou, em outras palavras, se a conclusão está adequadamente *justificada* em vista da informação disponível, se a conclusão pode ser afirmada a partir da informação que se tem. Note que isso é diferente de explicar o que foi acontecendo dentro de seu cérebro até você chegar a concluir que os brincos eram de esmeralda. (Há, porém, um sentido em que se pode dizer que a lógica também se interessa por como ocorre o raciocinar, e falaremos um pouco sobre isso quando discutirmos *métodos* de inferência.)

1.3 Argumentos

Justificar uma afirmação que se faz, ou dar as razões para uma certa conclusão obtida, é algo de bastante importância em muitas situações. Por exemplo, você pode estar tentando convencer outras pessoas de alguma coisa, ou precisa saber com certeza se o dinheiro vai ser suficiente ou não para pagar o aluguel: o seu agir depende de ter essa certeza. A importância de uma boa justificativa vem do fato de que muitas vezes cometemos erros de raciocínio, chegando a uma conclusão que simplesmente não decorre da informação disponível. E, claro, há contextos nos quais uma afirmação só pode ser aceita como verdadeira se muito bem justificada: na ciência de um modo geral, por exemplo, ou em um tribunal (onde alguém só pode ser condenado se não houver dúvida quanto a sua culpa). Assim, precisamos comumente de algum tipo de suporte para as conclusões atingidas, uma certa garantia daquilo que estamos afirmando.

É claro que nem toda afirmação ou conclusão necessita ser justi-

ficada: nossos amigos podem se dar por satisfeitos com o que dizemos, sabendo, por exemplo, que não temos o hábito de contar mentiras. Ou pode acontecer que estejamos afirmando algo evidente por si mesmo. Por exemplo, você pode passar meia hora pensando e chegar à conclusão de que as rãs verdes são verdes: uma afirmação como essa é o que se costuma chamar um "óbvio ululante", e realmente não há necessidade de justificá-la. (É uma afirmação totalmente desinteressante, para falar a verdade.) Ou você pode afirmar que está com dor de cabeça: nesse caso, ninguém melhor do que você para saber isso, e sua palavra deveria ser, então, suficiente (a menos que haja algum motivo muito sério que leve alguém a desconfiar de que você poderia estar mentindo, seja lá por que razão).

Contudo, em muitas situações, você se encontra diante da necessidade de explicar *por que* você chegou a uma tal conclusão, ou *com base em que* você está afirmando tal ou qual coisa. Com relação ao problema dos brincos das princesas, uma justificação de que os brincos de Griselda são de esmeralda pode ser algo como o que se segue:

> Existem apenas dois pares de brincos de rubi; logo, se tanto Genoveva quanto Griselda estivessem com brincos de rubi, Guilhermina, a primeira, saberia que os seus são de esmeralda. Guilhermina, contudo, não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos. Logo, ou Genoveva e Griselda tinham ambas brincos de esmeralda, ou uma tinha brincos de rubi e a outra, de esmeralda. Mas disso se segue agora que, se Griselda tivesse brincos de rubi, Genoveva, a segunda, teria visto isso, e saberia que os seus são de esmeralda. Genoveva, contudo, também não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos. Logo, Griselda não tinha brincos de rubi, ou seja, seus brincos eram de *esmeralda*.

Note que a justificativa acima não é um processo mental de raciocínio, mas consiste em várias sentenças em português, que podem ser compreendidas por outras pessoas. Ela provavelmente também não é uma descrição de como você chegou a saber qual o tipo de pedra nos brincos de Griselda, mas é uma espécie de "reconstrução racional" desse processo: uma listagem das razões que o/a levam a crer que os brincos são de esmeralda, mostrando como essa conclusão decorre

dos dados do problema. Ou seja, o trecho acima contém *argumentos* a favor da conclusão de que os brincos de Griselda são de esmeralda. Para dizer isso usando outros termos, no trecho acima mostramos como *deduzir*, ou *demonstrar*, a partir dos dados do problema, a conclusão a respeito de qual pedra estava nos brincos de Griselda.

Vamos, então, ver o que são estas coisas, os argumentos. Examine a primeira sentença que ocorre na justificação acima, isto é:

> Existem apenas dois pares de brincos de rubi; logo, se tanto Genoveva quanto Griselda estivessem com brincos de rubi, Guilhermina, a primeira, saberia que os seus são de esmeralda.

Podemos dividir essa sentença em duas partes: primeiro, há a afirmação de que existem apenas dois pares de rubi. Em seguida temos a palavra 'logo', e então uma segunda afirmação: a de que Guilhermina saberia qual a pedra de seus brincos (esmeralda) se Genoveva e Griselda estivessem usando brincos de rubi. Ora, a palavra 'logo' tem a função de indicar que a segunda afirmação *se segue* da primeira, ou, dito de outra forma, que a primeira é uma boa razão para aceitar a segunda, que a segunda é uma conclusão a ser tirada da primeira. (Talvez você ainda se lembre, das aulas de português, que 'logo' é uma conjunção coordenativa *conclusiva*.)

Podemos representar isso, de um modo mais explícito, por meio da seguinte construção:

P Existem apenas dois pares de brincos de rubi.
▶ Se tanto Genoveva quanto Griselda tivessem brincos de rubi, Guilhermina saberia que os seus são de esmeralda.

A primeira das sentenças acima, assinalada com 'P', expressa algo sabido ou, no exemplo em questão, aceito, pois faz parte do enunciado do problema: que existem apenas dois pares de brincos de rubi. E, como vimos, a outra sentença, assinalada com '▶', é afirmada *com base na anterior*. Com ela estamos descobrindo algo novo sobre o problema: que, se tanto Genoveva quanto Griselda tivessem brincos de rubi, Guilhermina saberia que os seus são de esmeralda. Note que isso não aparece explicitamente na história, mas é uma *conseqüência*

das informações que lá estão. A essa estrutura — o conjunto formado pelas duas sentenças apresentadas — chamamos *argumento*.

No caso geral, um argumento pode ser definido como um conjunto (não-vazio e finito) de sentenças, das quais uma é chamada de *conclusão*, as outras de *premissas*, e pretende-se que as premissas justifiquem, garantam ou dêem evidência para a conclusão. No exemplo acima, temos apenas *uma* premissa: a sentença marcada com 'P'; a outra, assinalada com '▶', é a conclusão.

Algumas observações a esse respeito. Primeiro, você deve ter observado que podemos transmitir informação por meio de sentenças de uma língua: uma vez que as pessoas não têm acesso direto aos pensamentos umas das outras, o uso de sentenças tem a vantagem de colocar a informação em uma forma intersubjetiva, sendo assim possível analisar se a justificativa apresentada é correta ou não. Essa é a razão pela qual dizemos que os argumentos são conjuntos de sentenças.

Em segundo lugar, um argumento está sendo definido como um conjunto *não-vazio e finito* de sentenças. Que esse conjunto deva ser não-vazio é óbvio, ou não teríamos nem mesmo uma conclusão. Em geral um argumento contém uma (e apenas uma) conclusão, e pelo menos uma premissa. Como veremos mais adiante, há situações nas quais é conveniente falar de argumentos que contêm simplesmente a conclusão, isto é, que têm zero premissas. Por outro lado, ainda que o número de premissas possa variar bastante, ele deve ser finito: não aceitaremos (ao menos neste livro) trabalhar com um número infinito de premissas. (De fato, existem sistemas de lógica que procuram tratar de argumentos com um número infinito de premissas, ou com conclusões múltiplas, mas não nos ocuparemos deles.)

Em terceiro lugar, note que um conjunto de sentenças quaisquer, sem relação umas com as outras, não constitui um argumento. Para que se tenha um argumento, deve haver por parte de quem o apresenta a *intenção* de afirmar a conclusão com base nas premissas — isto é, de que a conclusão se siga das premissas; que a conclusão decorra das, ou esteja garantida pelas, premissas.

Em quarto lugar, como já mencionei, na justificação de que os brincos de Griselda são de esmeralda há vários argumentos envolvidos; aquele que vimos poucas linhas atrás foi apenas o primeiro.

Sua conclusão vai ser usada como premissa para justificar uma nova conclusão, e assim por diante até a conclusão final. Para dar mais um exemplo, um segundo argumento contido no trecho acima é o seguinte:

P1 Se tanto Genoveva quanto Griselda tivessem brincos de rubi, Guilhermina saberia que os seus são de esmeralda.
P2 Guilhermina não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos.
▶ Ou Genoveva e Griselda tinham ambas brincos de esmeralda, ou uma tinha brincos de rubi, e a outra, de esmeralda.

A primeira premissa desse argumento é a conclusão do argumento anterior, enquanto a segunda, mais uma vez, consiste de informação contida no problema. A propósito, ser premissa ou conclusão não é algo absoluto: uma sentença pode ser conclusão em um argumento, e premissa em outro — como P1 no caso anterior.

Em último lugar, ainda que os argumentos tenham sido definidos como conjuntos de sentenças, essa definição deixa mesmo assim um pouco a desejar, pois, na verdade, existem vários tipos de sentença, e nem todos eles, de acordo com a opinião mais em voga, são admissíveis como parte de um argumento. Além do mais, muitos autores são da opinião de que um argumento envolve outras coisas que não sentenças, coisas como *proposições*, ou como *enunciados*. Assim, para que nossa definição de argumento seja realmente uma boa definição, faz-se necessário conversar um pouco mais detalhadamente sobre isto — e é o que vamos fazer na seção a seguir.

1.4 Sentenças, proposições, enunciados

Para não complicar muito as coisas, vou começar supondo que você tenha uma boa idéia do que sejam as palavras da língua portuguesa. (Entre outras, aquelas que estão listadas no *Aurélio*, por exemplo.) Ora, as palavras podem ser combinadas para formar diversas expressões lingüísticas, incluindo as sentenças — que, por sua vez, podem formar argumentos, poemas e declarações de amor. Assim, vamos dizer inicialmente que uma sentença (do português) é uma *seqüência*

de palavras do português que contenha ao menos um verbo flexionado (e alguns sinais de pontuação, no português escrito), como, por exemplo:

O gato está no capacho. (1)

Toda vez que faz sol, eu vou à praia. (2)

('The cat is on the mat', obviamente, é uma sentença do inglês.)

É claro que nem toda seqüência de palavras do português (escrito) constitui uma sentença, como você facilmente pode constatar:

*Os gato tá nos capacho. (3)

*gato capacho casa que que está é se no. (4)

Nenhuma das seqüências de palavras acima é uma sentença da norma culta do português (o que os lingüistas costumam indicar marcando-as com um asterisco): elas vão claramente contra as regras da *gramática* da língua portuguesa. Por exemplo, em (3) a segunda palavra (de acordo com a norma culta) deveria ser 'gatos' em vez de 'gato', uma vez que o artigo definido que precede essa palavra está no plural (e, similarmente, com relação a 'capacho'). Essa sentença, ainda que não gramatical no caso da norma culta do português, é gramatical em algumas variantes do português — o que já não é o caso de (4).

Dessa maneira, o que determina quais seqüências de palavras de uma língua constituem sentenças dessa língua é sua gramática. Uma gramática, a propósito, nada mais é do que um conjunto de regras que dizem de que forma se podem combinar as palavras. (Essas regras, claro, podem mudar — e mudam — com o tempo, mas isso é uma outra história.)

As sentenças podem ser classificadas em diversos tipos, mas vamos ver agora por que nem todos eles vão poder fazer parte de argumentos. Como num argumento estamos pretendendo afirmar a conclusão com base nas premissas, tanto premissas quanto conclusão devem ser coisas que podem ser afirmadas ou negadas: ou seja, coisas que podem ser consideradas *verdadeiras* ou *falsas*. Em vista disso, sentenças como

Que horas são?
Feche a porta!

normalmente não são admitidas em argumentos. A primeira é uma pergunta — uma sentença *interrogativa* — enquanto a segunda é uma ordem — uma sentença *imperativa*. Nem uma, nem outra, pode ser afirmada ou negada, ou considerada verdadeira ou falsa. As perguntas podem ser interessantes, inoportunas, descabidas, e assim por diante, mas fica esquisito dizer que uma pergunta é verdadeira, ou que é falsa. A mesma coisa acontece com respeito a ordens e pedidos. Assim, as sentenças que nos interessam na lógica são as *sentenças declarativas*, aquelas que podemos afirmar ou negar, como (1) e (2) acima. Isto exclui as sentenças interrogativas, imperativas, exclamativas, e assim por diante.[1]

Contudo, será que as sentenças declarativas realmente correspondem ao que desejamos, isto é, são coisas que podem ser ou verdadeiras ou falsas? Ainda que muitos autores afirmem que sim, um bom número tem uma opinião contrária. Acontece que as sentenças (inclusive as declarativas) podem ser usadas para expressar muitas coisas diferentes — e parece que são estas outras coisas que costumamos achar verdadeiras ou falsas. Vamos ver um exemplo: é impossível dizer se a sentença

Está chovendo, (5)

tomada fora de qualquer contexto, é verdadeira ou falsa. Ela pode estar sendo usada para afirmar que está chovendo no centro de Florianópolis, às 21 horas do dia 8 de julho de 1998 — o que é verdade — ou para afirmar que está chovendo no lado escuro da Lua, no mesmo dia e hora — o que não é. E para piorar as coisas, supor que são as sentenças que são verdadeiras ou falsas pode implicar uma sentença sendo verdadeira e falsa numa mesma situação. Imagine, por exemplo, que Ollie Hardy e Stan Laurel (mais conhecidos no Brasil como o Gordo e o Magro) estejam juntos numa mesma sala, e afirmem, simultaneamente, a sentença

Eu sou gordo. (6)

---

[1] Isto, contudo, começou a mudar nos últimos anos, pois há vários lógicos trabalhando na construção de lógicas imperativas e lógicas erotéticas (de perguntas), mas não vamos nos ocupar disto neste livro, que é de caráter introdutório.

Afirmada por Hardy, esta sentença é verdadeira, e falsa se afirmada por Laurel. Somos então obrigados a concluir que a sentença é verdadeira *e* falsa ao mesmo tempo? Este é um resultado que parece não ser muito desejável, mas que pode ser evitado se considerarmos que são outras as coisas que podem ser verdadeiras ou falsas, e que compõem argumentos. Candidatos tradicionais são *proposições* e *enunciados*.

Vamos tentar esclarecer o que estas coisas são, considerando alguns exemplos a mais (onde Miau é obviamente um gato):

Miau rasgou a cortina. (7)

A cortina foi rasgada por Miau. (8)

É fácil verificar que temos aqui duas sentenças distintas: (7) começa com a palavra 'Miau', e (8), com a palavra 'A'; logo, se sentenças são seqüências de palavras, (8) é diferente de (7), uma vez que as seqüências são diferentes. Contudo, apesar de serem diferentes, (7) e (8) têm alguma coisa em comum: elas podem ser usadas para expressar uma mesma *proposição* (ou seja, que Miau rasgou a cortina). Mas o que é, afinal, uma proposição?

Aqui a coisa se complica um pouco, pois há grande discordância sobre o que, exatamente, é uma proposição. É costumeiro identificar uma proposição com o significado de uma sentença declarativa. Isto, entretanto, não resolveria o problema mencionado acima com respeito a Laurel e Hardy. Afinal, a sentença (6) tem um único significado, ainda que afirmada por diferentes pessoas.

Fora isso, as proposições têm sido ainda identificadas com conjuntos de mundos possíveis, pensamentos, conjuntos de sentenças sinônimas, estados de coisas, representações mentais, e até mesmo com as próprias sentenças declarativas. Por outro lado, muitos autores estão convencidos de que proposições não existem. Afinal, você não consegue enxergar uma proposição, nem agarrar uma: proposições não ocupam lugar no espaço, não são afetadas pela gravidade, nem refletem a luz. Na melhor das hipóteses, dizem eles, as proposições são complicações desnecessárias, e pode-se muito bem trabalhar apenas com sentenças.

O que proponho fazer aqui é o seguinte: vamos reservar o termo 'sentença' para falar das seqüências gramaticais de palavras, e

'proposição' para aquelas coisas que podem ser verdadeiras ou falsas, aquelas coisas que podemos saber, afirmar, rejeitar, de que podemos duvidar, em que podemos acreditar etc.[2] Assim, vamos caracterizar as proposições como espécies de alegações ou asserções sobre o mundo: por exemplo, quando Hardy afirma a sentença (6) acima, ele está com isto fazendo uma asserção a seu respeito, Hardy, que é diferente da asserção feita por Laurel através da mesma sentença. Dito de outro modo, Hardy usa (6) para expressar a *proposição verdadeira* de que Ollie Hardy é gordo, enquanto o uso por Laurel de (6) expressa a *proposição falsa* de que Stan Laurel é gordo.

Quanto aos *enunciados*, também há divergências sobre como defini-los. Alguns autores chamam de enunciado o que estou aqui chamando de proposição. Vamos aqui caracterizar os enunciados como espécies de evento que pode ser datado, envolvendo a afirmação por alguém, em alguma situação, de alguma proposição (o que é feito pelo uso de uma sentença declarativa). (Cf. Barwise & Etchemendy, 1987, p.10.) Para diferenciar enunciados de proposições, observe que, às vezes, os enunciados deixam de expressar uma proposição. Por exemplo, se eu afirmar, apontando para uma mesa vazia

Aquela garrafa de cerveja está quebrada. (9)

embora eu afirme uma sentença e, portanto, profira um enunciado, eu falho em expressar uma proposição, porque não há nenhuma garrafa de cerveja lá.

Antes de continuarmos, porém, volto a lembrar que proposições e enunciados são definidos de diversas outras maneiras por outros autores.

Quanto aos argumentos, deveríamos, então, redefini-los como conjuntos não-vazios e finitos de *proposições*, pois, afinal, são as proposições que podem ser verdadeiras ou falsas. Contudo, a lógica clássica, que é o nosso objeto de estudo neste livro, tem tradicionalmente trabalhado com sentenças. Isto é algo que pode ser feito, se tivermos

[2]Estou aqui seguindo a distinção entre sentenças, proposições e enunciados usualmente feita na semântica de situações (cf., por exemplo, Barwise & Etchemendy, 1987, p.9). A propósito, a referência bibliográfica completa das obras aqui mencionadas você encontra na Bibliografia, no final do livro.

em mente que, de um modo geral, um argumento é apresentado em um certo contexto, mais ou menos bem definido, no qual se pode dizer que uma sentença expressa uma única proposição. Se o contexto está claro, podemos tomar uma sentença tal como 'Está chovendo' como uma abreviatura de 'Está chovendo no centro de Florianópolis às 21 horas do dia 8 de julho de 1998'. No exemplo envolvendo Laurel e Hardy, podemos trocar a sentença 'Eu sou gordo' por 'Ollie Hardy é gordo', ou por 'Stan Laurel é gordo', dependendo do caso.

Em vista disso, e considerando ainda que este é um livro introdutório, vamos fazer a seguinte simplificação: consideraremos que o contexto estará, de um modo geral, claro, e que uma sentença estará, também de um modo geral, expressando apenas uma proposição.[3] Esta simplificação torna as coisas mais fáceis para um livro introdutório, pois não precisamos, então, fazer uma teoria de proposições, dizendo exatamente o que elas são, e como as sentenças se relacionam com elas. Podemos, portanto, trabalhar diretamente com as sentenças. Assim, vamos falar de argumentos, indiferentemente, como conjuntos de sentenças ou proposições.

---

[3] Além dos problemas acima mencionados, é bom lembrar também que há sentenças que são semanticamente ambíguas — por exemplo, 'Todo homem ama uma mulher'. Podemos estar falando de uma mulher só, amada por todos (Claudia Schiffer?), ou de mulheres diferentes — cada um dos vários homens amando uma mulher diferente. Já outras sentenças são sintaticamente ambíguas, como 'João viu a moça com um binóculo' — ele pode ter visto com um binóculo, ou talvez a moça tivesse um.

CAPÍTULO 2

LÓGICA E ARGUMENTOS

Neste capítulo vamos examinar com um pouco mais de detalhes os argumentos e tratar um pouco do interesse que a lógica tem neles. Falaremos da validade e da correção de argumentos, sobre argumentos dedutivos e indutivos e, finalmente, faremos uma breve digressão pela história da lógica.

2.1 Validade e forma

Na definição de lógica que apresentei ao iniciar o capítulo anterior, afirmei que a lógica investiga princípios e métodos de inferência. Como você se lembra, o processo de inferência, ou raciocínio, é um processo mental; contudo, não estamos interessados, enquanto lógicos, no processo psicológico de raciocínio, mas sim em algo que resulta desse processo quando se faz uma listagem das razões para que se acredite em uma certa conclusão: os argumentos. De certa maneira, você pode dizer que o raciocínio é um processo de construir argumentos para aceitar ou rejeitar uma certa proposição. Assim, na tentativa de determinar se o raciocínio realizado foi correto, uma das coisas das quais a lógica se ocupa é a *análise dos argumentos* que são construídos. Ou seja, cabe à lógica dizer se estamos diante de um "bom" argumento ou não. Ao tentar responder a essa questão, contudo, há dois aspectos distintos que temos de levar em conta. Vamos

começar examinando o argumento no seguinte exemplo (e vamos também supor que Miau seja um gato preto):

(A1) P_1 Todo gato é mamífero.
P_2 Miau é um gato.
▶ Miau é mamífero.

Não deve haver muita dúvida de que a conclusão, 'Miau é um mamífero', está adequadamente justificada pelas premissas: sendo Miau um gato, a afirmação de que *todo gato* é um mamífero também o inclui; assim, ele não tem como não ser um mamífero. Mas compare esse argumento com o exemplo a seguir (Lulu, digamos, é aquela peste do cachorro do vizinho):

(A2) P_1 Todo gato é mamífero.
P_2 Lulu é um mamífero.
▶ Lulu é gato.

É óbvio que há alguma coisa errada com esse argumento: apesar de as premissas serem verdadeiras, a conclusão é falsa. Lulu é de fato um mamífero, mas ele é um cachorro. Como você sabe, existem muitos outros mamíferos além de gatos; ou seja, ser um mamífero não basta para caracterizar um animal como gato. Assim, as duas premissas de (A2), mesmo sendo verdadeiras, não são suficientes para justificar a conclusão.

Considere agora o próximo exemplo (em que Cleo é um peixinho dourado): você diria que a conclusão está justificada?

(A3) P_1 Todo peixe é dourado.
P_2 Cleo é um peixe.
▶ Cleo é dourado.

Note, antes de mais nada, que é verdade que Cleo é dourado (conforme a suposição que fizemos acima). Ou seja, podemos dizer que a conclusão é verdadeira. Mas não seria correto dizer que a conclusão está justificada *com base* nas premissas apresentadas, pois *não é verdade que todo peixe é dourado*: alguns são de outras cores. Para colocar isso em outros termos, uma proposição *falsa* não é uma boa justificativa para uma outra proposição. Contudo — e este é agora

um detalhe importante — *se fosse verdade* que todo peixe é dourado, *então* Cleo teria forçosamente que ser dourado. Se as premissas *fossem* verdadeiras, isto já seria uma boa justificativa para a conclusão. Note a diferença com relação ao argumento a respeito de Lulu, em que, mesmo sendo as premissas verdadeiras, a conclusão é falsa.

Agora, se você comparar (A1) e (A3), vai notar que eles são bastante parecidos. Veja:

P_1 Todo $\begin{bmatrix}\text{gato}\\ \text{peixe}\end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix}\text{mamífero}\\ \text{dourado}\end{bmatrix}$.

P_2 $\begin{bmatrix}\text{Miau}\\ \text{Cleo}\end{bmatrix}$ é um $\begin{bmatrix}\text{gato}\\ \text{peixe}\end{bmatrix}$.

▶ $\begin{bmatrix}\text{Miau}\\ \text{Cleo}\end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix}\text{mamífero}\\ \text{dourado}\end{bmatrix}$.

Não é difícil perceber que a diferença entre (A3) e (A1) é que substituímos 'Miau' por 'Cleo', 'gato' por 'peixe' e 'mamífero' por 'dourado'. O que (A1) e (A3) têm em comum é a *estrutura*, ou *forma*, apresentada a seguir:

(F1) P_1 Todo *A* é *B*.
P_2 *c* é um *A*.
▶ *c* é *B*.

Em (F1), a letra '*c*' está ocupando o lugar reservado para nomes de indivíduos, como 'Miau' e 'Cleo', enquanto '*A*' e '*B*' ocupam o lugar de palavras como 'gato', 'peixe' etc. Assim, se você substituir '*A*' e '*B*' por outros termos, como 'ave', 'cachorro', 'preto', 'detetive' etc., e '*c*' por algum nome, como 'Tweety', 'Lulu', 'Sherlock Holmes', você terá um argumento com a mesma forma que (A1) e (A3). Por exemplo, substituindo '*A*', '*B*' e '*c*' pelas palavras 'marciano', 'cor-de-rosa' e 'Rrringlath', respectivamente, teremos:

(A4) P_1 Todo marciano é cor-de-rosa.
P_2 Rrringlath é um marciano.
▶ Rrringlath é cor-de-rosa.

Com relação a (A4), obviamente as premissas e a conclusão são falsas (não existem marcianos, tanto quanto se saiba, e, logo, não existem marcianos cor-de-rosa). Contudo, da mesma maneira que

(A3), se as premissas *fossem* verdadeiras, a conclusão também o seria. Podemos então dizer, a respeito dos exemplos (A1), (A3) e (A4), que sua conclusão é *conseqüência lógica* de suas premissas, ou seja, que tais exemplos são argumentos *válidos*.

Um argumento válido pode ser informalmente definido como aquele cuja conclusão é conseqüência lógica de suas premissas, ou seja, se *todas as circunstâncias que tornam as premissas verdadeiras tornam igualmente a conclusão verdadeira*. Dito de outra maneira, *se as premissas forem verdadeiras, não é possível que a conclusão seja falsa*. Vamos juntar isso tudo e oficializar as coisas na definição a seguir:

Definição 2.1 *Um argumento é válido se qualquer circunstância que torna suas premissas verdadeiras faz com que sua conclusão seja automaticamente verdadeira.*

Se um argumento é válido, dizemos que sua conclusão é *conseqüência lógica* de suas premissas. Essa é a noção informal que temos de validade e conseqüência lógica, e é o ponto de partida para tudo o que vem depois. Note, antes de mais nada, que um argumento pode ser válido mesmo que suas premissas e conclusão sejam falsas, como (A4), ou que uma premissa seja falsa e a conclusão verdadeira, como (A3). O que não pode absolutamente ocorrer, para um argumento ser válido, é que ele tenha premissas verdadeiras e conclusão falsa. Isso acontece, por exemplo, com (A2). Neste caso, dizemos que a conclusão de (A2) *não é* conseqüência lógica de suas premissas, que (A2) *não é válido*. Ou seja, (A2) é um argumento *inválido*.

Vamos agora parar e pensar um pouco: se (A1), (A3) e (A4) são válidos, e o que eles têm em comum é a forma (F1), será que a validade não depende da *forma*? Exatamente. E, para corroborar isso, note que o argumento (A2), considerado por nós inválido, tem uma forma diferente, a saber:

(F2) P_1 Todo *A* é *B*.
P_2 *c* é um *B*.
▶ *c* é *A*.

A diferença dessa forma para (F1) é que as letras '*A*' e '*B*', que ocorriam, respectivamente, na segunda premissa e na conclusão, trocaram de lugar. Essa pequena alteração na forma já é suficiente para

que (A2) seja inválido. Além disso, qualquer outro argumento que tenha a forma (F2) será inválido também. Considere o argumento seguinte:

(A5) P_1 Todo gato é mamífero.
P_2 Miau é um mamífero.
▶ Miau é gato.

Ainda que tanto as premissas quanto a conclusão de (A5) sejam verdadeiras, o fato é que é possível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão, falsa. Basta imaginar, digamos, que Miau não seja um gato, mas um elefante: continuaria sendo verdade que os gatos são mamíferos, e que Miau é um mamífero. Porém, seria falso que Miau é um gato.

Talvez uma outra maneira de colocar as coisas ajude você a entender essa idéia de forma. Vamos representar a primeira premissa de (A1), que diz que todo gato é mamífero, da seguinte maneira:

$$\text{gato} \longrightarrow \text{mamífero},$$

e a segunda premissa, que diz que Miau é um gato, assim:

$$\text{Miau} \longrightarrow \text{gato}.$$

Juntando isto, ficamos com

$$\text{Miau} \longrightarrow \text{gato} \longrightarrow \text{mamífero}. \tag{1}$$

Como você vê, o esquema acima representa as duas premissas de (A1). É fácil ver agora que a conclusão, que diz que Miau é mamífero, é uma conseqüência lógica dessas premissas. Basta iniciar com 'Miau' e ir seguindo as setas para ver que chegamos até 'mamífero'. Por outro lado, se representarmos (A2) de modo análogo, teremos:

$$\text{Lulu} \longrightarrow \text{mamífero} \longleftarrow \text{gato}. \tag{2}$$

Note que agora não conseguimos atingir a conclusão, de que Lulu é um gato, como fizemos anteriormente. Se começarmos com 'Lulu' e formos seguindo as setas, não chegaremos até 'gato'; não conseguimos

ir além de 'mamífero'. Ou seja, não podemos concluir que Lulu é um gato a partir das premissas de (A2). Portanto, (A2) é inválido.

Se você agora comparar (1) e (2), vai ver que são estruturas diferentes — formas diferentes. Assim, a validade de um argumento está ligada à forma que ele tem. Entretanto, a questão de como caracterizar a forma de um argumento não é muito fácil de responder, e não vamos tratar disso agora, mas voltaremos a falar dela em capítulos posteriores.

2.2 Validade e correção

Na seção anterior, vimos que os argumentos da forma (F1) — no caso, (A1), (A3) e (A4) — são todos válidos. No entanto, embora todos eles sejam argumentos válidos, apenas (A1) realmente *justifica* sua conclusão, pela razão adicional de ter premissas verdadeiras. A um argumento válido que, adicionalmente, tem premissas (e, conseqüentemente, a conclusão) verdadeiras, chamamos de *correto*. Ou seja:

Definição 2.2 *Um argumento é correto se for válido e, além disso, tiver premissas verdadeiras.*

Isso nos leva aos dois aspectos a distinguir na análise de um argumento — na verdade, duas questões que devem ser respondidas quando se faz tal análise. A primeira delas é:

[1] Todas as premissas do argumento são verdadeiras?

No caso (A3) isso não acontece; logo, esse argumento não justifica sua conclusão. Embora do ponto de vista lógico ele seja *válido*, ele não é *correto*. Contudo, simplesmente o fato de ter as premissas verdadeiras não é suficiente para que um argumento justifique sua conclusão, como vimos no exemplo (A2): a conclusão de que Lulu é um gato é falsa, pois ele é um cachorro. Ou seja, em (A2) há alguma coisa faltando, e isso tem a ver com a segunda pergunta, que podemos formular da seguinte maneira:

[2] Se todas as premissas do argumento forem verdadeiras, a conclusão também será obrigatoriamente verdadeira? Isto é, o argumento é válido?

Essa pergunta pode ser respondida de modo afirmativo para os argumentos (A1), (A3) e (A4). Em (A3), por exemplo, uma das premissas é, de fato, falsa, mas, como eu já disse, se todas elas *fossem* verdadeiras, então a conclusão estaria justificada. Com relação a (A4), como vimos, todas as proposições provavelmente são falsas (ao que tudo indica, não existem marcianos e, mesmo que existam, provavelmente nenhum se chama 'Rrringlath', nem é cor-de-rosa).

Uma terceira pergunta, que decorre das duas anteriores, é se o argumento é correto ou não. Ele só será correto, claro, se as duas primeiras perguntas forem respondidas afirmativamente.

Para que você melhor possa comparar os argumentos que vimos acima, o quadro a seguir apresenta as três perguntas e de que forma elas são respondidas para cada um deles.

	(A1)	(A2)	(A3)	(A4)	(A5)
Todas as premissas do argumento são verdadeiras?	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM
O argumento é válido?	SIM	NÃO	SIM	SIM	NÃO
O argumento é correto?	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO

Com relação, agora, ao papel da lógica na análise dos argumentos, ela se ocupa apenas da segunda questão, a da validade. É óbvio que, no dia-a-dia, se quisermos empregar argumentos que realmente justifiquem sua conclusão — argumentos corretos —, a questão da verdade das premissas também é da maior importância. Mas determinar, para cada argumento, se suas premissas são verdadeiras ou não, não é uma questão de lógica. Caso contrário, a lógica teria de ser a totalidade do conhecimento humano, pois as premissas de nossos argumentos podem envolver os mais variados assuntos: zoologia, matemática, química industrial, a psicologia feminina, o que cozinhar para o almoço, e assim por diante. Mas a lógica não pretende ser a ciência de tudo. Além do mais, muitas vezes fazemos inferências, e

procuramos obter conclusões, a partir de premissas que sabemos serem falsas. Como mencionei algumas páginas atrás, freqüentemente raciocinamos a partir de hipóteses: o que aconteceria se eu fizesse isso ou aquilo? Mesmo sabendo que o ponto de partida é falso, podemos tirar conclusões sobre o que poderia acontecer, e basear nossas ações nisso.

Para colocar isso de outro modo, a lógica não se interessa por argumentos específicos como (A1) ou (A3): o que se procura estudar são as *formas* de argumento, como (F1) e (F2); são essas formas que serão válidas ou não. Costuma-se dizer, a propósito, que a lógica não se ocupa de conteúdos, mas apenas da forma — e eis a razão pela qual ela é chamada de *lógica formal*.

Assim, não deve ser motivo de surpresa que a lógica deixe de lado a primeira das questões, ou seja, a de se premissas de um argumento são, de fato, verdadeiras ou falsas. O que interessa é: supondo que elas *fossem* verdadeiras, a conclusão teria obrigatoriamente de sê-lo? É essa relação de dependência entre premissas e conclusão que a lógica procura caracterizar.

Recorde, porém, que a caracterização de validade apresentada anteriormente é informal. Como veremos mais tarde, a lógica procura tornar isso mais preciso.

2.3 Dedução e indução

Além de considerar que argumentos são válidos ou inválidos, tradicionalmente tem sido também feita uma distinção entre argumentos *dedutivos* e *indutivos*. É costume diferenciá-los dizendo-se que os argumentos dedutivos são *não-ampliativos*, isto é, num argumento dedutivo, tudo o que está dito na conclusão já foi dito, ainda que implicitamente, nas premissas. Argumentos indutivos, por outro lado, seriam *ampliativos*, ou seja, a conclusão diz mais, vai além, do que o afirmado nas premissas.

Esta maneira de colocar as coisas, porém, é um tanto insatisfatória, pois não fica claro quando é que a conclusão diz só o afirmado nas premissas e quando diz mais do que isso. Uma saída seria dizer que a conclusão diz tudo o que está dito nas premissas se ela for con-

seqüência lógica das premissas — e então estaríamos identificando argumento dedutivo e argumento válido, o que fazem muitos autores. Num sentido *estrito*, portanto, podemos começar dizendo que um argumento é dedutivo se e somente se ele for válido. Contudo, há um sentido mais *amplo* em que um argumento, ainda que inválido, pode ser chamado de dedutivo: quando há a intenção, por parte de quem constrói ou apresenta o argumento, de que sua conclusão seja conseqüência lógica das premissas, ou seja, a pretensão de que a verdade de suas premissas garanta a verdade da conclusão.

Os argumentos (A1)–(A5) apresentados acima podem ser todos chamados de dedutivos, no sentido mais amplo do termo. No sentido estrito — isto é, argumento dedutivo e válido são a mesma coisa — apenas (A1), (A3) e (A4) poderiam ser ditos dedutivos, uma vez que são válidos, enquanto (A2) e (A5), sendo inválidos, não poderiam ser considerados dedutivos.

Porém, independentemente de usarmos o termo 'dedutivo' num sentido estrito ou amplo, nem todos os argumentos que usamos são dedutivos, ou seja, nem sempre pretendemos que a conclusão do argumento seja uma conseqüência lógica das premissas. Muitas vezes raciocinamos por analogia, ou usando probabilidades — conforme os exemplos abaixo, onde se pretende apenas que a conclusão seja altamente provável, dado que as premissas são verdadeiras:

(A6) P 80% dos entrevistados vão votar no candidato X.
▶ 80% de todos os eleitores vão votar em X.

ou então:

(A7) P_1 Esta vacina funcionou bem em macacos.
P_2 Esta vacina funcionou bem em porcos.
▶ Esta vacina vai funcionar bem em seres humanos.

Os argumentos correspondentes a esses tipos de raciocínio são chamados de *indutivos*. Repetindo, não há a pretensão de que a conclusão seja verdadeira caso as premissas o forem — apenas que ela é *provavelmente verdadeira*.

Como veremos em grande parte do que se segue, a lógica contemporânea é dedutiva. Afinal, estamos interessados, ao partir de proposições que sabemos ou supomos verdadeiras, em atingir conclusões

das quais tenhamos uma garantia de que também sejam verdadeiras. Nesse sentido, o ideal a ser alcançado é uma linha de argumentação dedutiva, em que a conclusão não pode ser falsa, caso tenhamos partido de premissas verdadeiras.

Porém, na vida real muitas vezes não temos esse tipo de garantia, e temos de fazer o melhor possível com o que dispomos. É aqui que se abre espaço para argumentos como os indutivos. Mas, ao contrário da lógica dedutiva — que, afinal, é o objeto deste livro —, a lógica indutiva não foi igualmente tão desenvolvida. Muitas propostas foram e têm sido feitas (poderíamos mencionar a lógica indutiva de Rudolf Carnap, por exemplo), mas tem sido muito difícil conseguir caracterizar de modo preciso o que seja um argumento indutivamente forte. Quando você diz, por exemplo, que, sendo as premissas verdadeiras, a conclusão é provavelmente verdadeira, qual o grau de probabilidade necessário para que o argumento indutivo seja considerado forte? Certamente uma probabilidade de 95% é alta, enquanto uma probabilidade de, digamos, 10% é baixa. Onde, porém, colocar o limite?

Questões como essa sempre dificultaram o desenvolvimento de uma lógica indutiva num grau de sofisticação semelhante ao da lógica dedutiva. A última década, contudo, viu ressurgir um interesse muito grande em esquemas de inferência não dedutivos, em razão de aplicações em inteligência artificial. Voltaremos a falar nisso, ainda que de modo breve, no final deste livro, mas, por enquanto, vamos começar estudando a lógica dedutiva.

2.4 A lógica e o processo de inferência

Visto que falamos bastante, até agora, da análise de argumentos, e que eu disse que a lógica não quer saber exatamente como as pessoas raciocinam, você pode estar com a impressão de que a análise de argumentos é a única coisa pela qual os lógicos se interessam. Ou seja, de que a lógica não é de auxílio algum quando se raciocina, mas só entra em campo mais tarde, para examinar um argumento e dizer se ele é válido ou não. Você pode até mesmo estar imaginando que a lógica se ocupa apenas das relações entre o ponto de partida (a informação disponível, as premissas) e o ponto de chegada (a conclusão

atingida), não importando como o caminho foi percorrido. Mas isso não é verdade. Lembre que procuramos caracterizar a lógica como o estudo de princípios e métodos de inferência, e isso é mais do que a simples análise de argumentos.

Com certeza, o objeto central de estudo da lógica é a relação de conseqüência entre um conjunto de proposições e uma outra proposição. Essas proposições, claro, não precisam estar necessariamente expressas por sentenças de alguma língua como o português: podemos usar, em vez disso, fórmulas de alguma linguagem artificial, como temos na matemática. Mas esse estudo pela lógica de uma relação de conseqüência não se resume apenas em dizer se de fato alguma conclusão é conseqüência de certas premissas ou não, mas inclui também o estudo de técnicas que auxiliam a produzir uma conclusão a partir da informação disponível. O desenvolvimento da lógica teve como um de seus resultados a identificação de muitas e muitas regras para a produção de bons argumentos, regras que nada mais são do que formas mais simples de argumento válido, como (F1) acima. Sabendo que (F1) é uma forma válida de argumento, e dispondo da informação de que

(i) Todo filósofo de mesa de bar é desmiolado, e

(ii) Setembrino é um filósofo de mesa de bar,

você pode exclamar 'Aha!', e tirar a conclusão de que o pobre Setembrino é desmiolado. Ao fazer isso, você aplicou a forma válida (F1) à informação de que você dispõe, tirando uma conclusão. Em geral, temos à disposição um conjunto de formas válidas simples, ou, para usar a nomenclatura correta, *regras de inferência*, por meio das quais podemos ir manipulando os dados disponíveis e ir derivando conclusões.

Um outro objetivo da lógica, então, seria o de estudar regras de inferência e seu emprego. Hoje em dia, dada a disponibilidade de computadores, há inclusive diversas tentativas bem-sucedidas de *automatizar* o processo de inferência. Isso significa, por exemplo, que você pode ter, armazenadas em algum banco de dados, as informações sobre os brincos e princesas, digitar a pergunta e obter automaticamente a resposta de que os brincos de Griselda são de esmeralda.

Um programa de computador se encarrega de "raciocinar" em seu lugar.

Não vou entrar em mais detalhes neste momento a respeito disso, pois precisamos ver muita coisa primeiro, mas voltaremos a falar no assunto. Enquanto isso, você já deve ter tido, espero, uma primeira idéia do que seja a lógica e de que ela se ocupa — uma idéia que você pode ir aperfeiçoando com o tempo.

2.5 Um pouco de história

Para encerrar este capítulo, vamos dar uma olhada muito rápida na história da lógica e ver um pouco do que andou acontecendo desde o início.

A lógica como disciplina intelectual foi criada no século IV a. C. por um filósofo grego chamado Aristóteles (384–322 a. C.), do qual certamente você já ouviu falar. É claro que já antes de Aristóteles havia uma certa preocupação com a questão da validade dos argumentos — por exemplo, por parte dos sofistas e de Platão. Mas estes pensadores, embora se tenham ocupado um pouco de tais questões, de fato nunca desenvolveram uma teoria lógica — nunca procuraram fazer um estudo sistemático dos tipos de argumento válido, ao contrário de Aristóteles, que, assim, fundou a lógica praticamente a partir do nada.

As contribuições que Aristóteles deu para a lógica foram muitas, e teremos ocasião de falar de algumas delas mais tarde. Por enquanto, gostaria apenas de mencionar sua *teoria do silogismo*, que constitui o cerne da lógica aristotélica. Silogismo é um tipo muito particular de argumento, tendo sempre duas premissas e, claro, uma conclusão. Além disso, apenas um tipo especial de proposição, as proposições *categóricas*, pode fazer parte de um silogismo. Estas são proposições como 'Todo gato é preto' ou 'Algum unicórnio não é cor-de-rosa': temos primeiro um quantificador, como 'todo', 'nenhum', 'algum', seguido de um termo ('gato', 'unicórnio'), uma cópula ('é', 'não é'), e outro termo. Os argumentos (A1)–(A5) apresentados anteriormente, por exemplo, são todos silogismos.

O que Aristóteles procurou fazer foi caracterizar as formas de si-

logismo e determinar quais delas são válidas, e quais não, o que ele conseguiu com bastante sucesso. Como um primeiro passo no desenvolvimento da lógica, a teoria do silogismo foi extremamente importante. Contudo, restringir os argumentos utilizáveis a silogismos deixa muito a desejar: existem apenas 19 formas válidas de silogismo. (Aristóteles falava em 14, pois considerava de mesma forma alguns silogismos que, mais tarde, foram classificados como tendo uma forma diferente.)

A teoria do silogismo é, assim, bastante limitada; por razões históricas, contudo, a lógica de Aristóteles foi considerada *a* lógica até bem pouco tempo atrás. Não que outros gregos não se tivessem ocupado de lógica. Houve outros, especialmente os megáricos e, mais ainda, os estóicos, como Crísipo (cerca de 280–205 a. C.), que desenvolveram uma teoria lógica diferente da de Aristóteles, e certamente tão interessante quanto a dele. (Essa teoria forma a base do que hoje em dia se denomina *lógica proposicional*, da qual ainda vamos falar.) Na Grécia antiga, no entanto, essas teorias foram encaradas como rivais, embora na verdade elas se complementem. Poderiam ter sido reunidas numa só teoria, mas havia uma certa inimizade entre aristotélicos e estóicos, e isso acabou não acontecendo. E, como as obras dos estóicos não resistiram ao tempo, o que ficou conhecido na Idade Média, e daí por diante, como 'lógica' foram apenas os escritos de Aristóteles — e os melhoramentos introduzidos pelos lógicos depois dele, particularmente pelos medievais. Isso levou o filósofo alemão Immanuel Kant (1724–1804) a afirmar, no prefácio de sua *Crítica da razão pura*, que a lógica tinha sido inventada pronta por Aristóteles, e nada mais havia a fazer.

Um caso célebre de previsão errada. Não muito depois dessa infeliz afirmação de Kant, a partir da metade do século XIX, a coisa começou a mudar, e o marco inicial foi a publicação, em 1849, de *Investigação sobre as leis do pensamento*, de George Boole (1815–1864). Esse livro deu início à "simbolização", ou "matematização" da lógica, que consistiu em fazer, numa linguagem simbólica, artificial, o que Aristóteles havia começado em grego. Boole, na verdade, apresentou um *cálculo* lógico (hoje bastante conhecido também como *álgebra booleana*) contendo um número infinito de formas válidas de argumento.

O grande avanço para a lógica contemporânea, no entanto, veio com a obra do filósofo e matemático alemão Gottlob Frege (1848–1925), mais precisamente, em 1879, com a publicação da *Conceitografia*.

Ao contrário de Aristóteles, e mesmo de Boole, que procuravam identificar as formas válidas de argumento, a preocupação básica de Frege era a sistematização do raciocínio matemático, ou, dito de outra maneira, encontrar uma caracterização precisa do que é uma *demonstração* matemática. Você sabe que, na matemática, para mostrar que uma proposição é verdadeira (um teorema) não se recorre à experiência ou à observação, como em várias outras ciências. Na matemática — para colocar as coisas de um modo simples —, a verdade de uma proposição é estabelecida por meio de uma demonstração dela, isto é, uma seqüência argumentativa (dedutiva) mostrando que ela se segue logicamente de outras proposições aceitas (ou já mostradas verdadeiras). Ora, Frege havia notado que os matemáticos da época freqüentemente cometiam erros em suas demonstrações, supondo assim que certos teoremas estavam demonstrados, quando na verdade não estavam. Para corrigir isso, Frege procurou formalizar as regras de demonstração, iniciando com regras elementares, bem simples, sobre cuja aplicação não houvesse dúvidas. O resultado, que revolucionou a lógica, foi a criação do *cálculo de predicados*, um cálculo lógico que é o objeto de estudo de boa parte deste livro.

O uso por Frege de linguagens artificiais, à maneira da matemática, fez com que a lógica contemporânea passasse a ser denominada 'simbólica' ou 'matemática', em contrapartida à 'lógica tradicional', expressão que passou a designar a lógica aristotélica — isto é, teoria do silogismo. Desde então, a lógica tem se desenvolvido aceleradamente, tanto que, hoje em dia, ela conta com dezenas de especialidades e subespecialidades. Considera-se inclusive a lógica não mais como uma parte da filosofia (tal como, digamos, ética ou metafísica), mas como uma ciência independente, como a matemática ou a lingüística.

Embora o objetivo inicial da lógica fosse a análise de argumentos, o uso de linguagens artificiais ampliou seu âmbito de atuação: as linguagens da lógica passaram a ter outros usos. Por exemplo, passamos a poder representar informação em geral por meio delas. Hoje em dia,

nota-se o grande papel da lógica em investigações científicas de ponta, como é o caso da Inteligência Artificial, particularmente nas áreas de representação de conhecimento e demonstração automática. Estima-se, até mesmo, que a lógica tem ou terá a mesma importância, para a Inteligência Artificial, que a matemática tem para a física teórica. E, para finalizar, note que podemos até utilizar a lógica como linguagem de programação — é o caso, por exemplo, de PROLOG, uma linguagem cujo nome significa, precisamente, PROgramação em LÓGica.

CAPÍTULO 3

PRELIMINARES

Antes de começarmos a nos ocupar propriamente da lógica, precisamos passar por algumas preliminares que serão necessárias para o nosso estudo — e é o que vai acontecer neste capítulo. Vamos falar um pouco mais sobre linguagens e expressões lingüísticas, sobre linguagens artificiais e sobre o uso de variáveis.

3.1 Linguagens

Se você olhar em um dicionário ou gramática, descobrirá que uma *linguagem* é definida como um *sistema de símbolos que serve como meio de comunicação*. Note que isso não se restringe à comunicação entre humanos: hoje em dia existem dezenas de *linguagens de programação*, que, poderíamos dizer, servem também para comunicar instruções de um humano a uma máquina. Estas seriam exemplos de *linguagens artificiais*, ao contrário do português, inglês, e assim por diante, que são as chamadas *linguagens naturais*, ou *línguas*.

Uma linguagem também pode ser definida como um "*conjunto (finito ou infinito) de sentenças, cada uma de comprimento finito e formada a partir de um conjunto finito de símbolos*" (Chomsky, 1957, p.13). Isso significa que, numa linguagem, temos um conjunto finito de elementos básicos, com os quais formamos diferentes tipos de expressões

lingüísticas, como palavras e sentenças. No caso de uma língua, como o português, os elementos básicos correspondem aos *morfemas*: estas são as menores unidades dotadas de significado. Combinações de morfemas, de acordo com certas regras (a *morfologia*), nos permitem formar palavras, e combinações de palavras, de acordo com certas outras regras (a *gramática*), nos permitem formar frases e sentenças. Com as sentenças, claro, você pode construir estruturas mais complexas, como argumentos, discursos, diálogos, artigos de jornal etc. — sem esquecer as declarações de amor!

Há três níveis em que se pode estudar uma linguagem. O primeiro deles corresponde à *sintaxe*, que se ocupa com o aspecto estrutural dos objetos lingüísticos. Por exemplo, ao dizer que a palavra 'gato' começa com a letra 'g', ou que a sentença

Miau é um gato e Lulu é um cachorro

é um período composto, estamos dizendo coisas que pertencem ao âmbito da sintaxe. As regras gramaticais, a propósito, são, em geral, regras sintáticas. A sintaxe, assim, fica num nível puramente formal — ela se ocupa das relações formais entre os símbolos da linguagem, a maneira pela qual os símbolos se combinam — e não diz nada a respeito de significados. Estes já fazem parte de uma outra dimensão no estudo das linguagens, e são o objeto de investigação da *semântica*. A semântica se ocupa dos significados das expressões lingüísticas, isto é, das relações entre expressões lingüísticas e seus significados — coisas que estão "fora" da linguagem.

Uma terceira dimensão é a *pragmática*, que estuda o uso das construções lingüísticas pelos falantes de uma língua. Note que semântica e pragmática são coisas bem diferentes. Para dar um exemplo, a sentença

Está muito quente aqui

obviamente significa que no local onde o falante se encontra (seja lá onde for isso) está fazendo muito calor. E parece ser também óbvio que esta sentença *não* significa algo como

Abra a janela, por favor.

Contudo, em termos pragmáticos, isso pode ser exatamente o que o falante está indiretamente querendo dizer: ao invés de um pedido direto, faz-se um circunlóquio. (As pessoas costumam fazer rodeios para falar, você sabe disso.) Da mesma forma, se alguém lhe perguntar se você sabe que horas são, um simples 'sim' será insuficiente como resposta — quem fez a pergunta claramente espera que você informe que horas são (nove e meia, por exemplo). Contudo, se olharmos apenas para o significado da sentença, esquecendo sua dimensão pragmática, consideraremos que a pessoa apenas perguntou se você sabe ou não as horas.

3.2 Linguagens artificiais

Ao contrário de uma língua, que surge e evolui com um grupo de indivíduos, estando, portanto, em constante mudança, uma linguagem artificial tem uma gramática rigorosamente definida, que não se altera com o passar do tempo. Como você terá ocasião de ver nos capítulos seguintes, a lógica faz uso dessas linguagens, também chamadas de *linguagens formais*. As razões são as de que, tendo as linguagens artificiais uma gramática precisa, sempre se pode dizer se uma expressão da linguagem é gramatical ou não (o que é freqüentemente difícil com as linguagens naturais como o português). Depois, como já mencionei, a lógica faz abstração de conteúdos, e preocupa-se apenas com as formas dos argumentos. Assim, fica mais fácil trabalhar com linguagens artificiais — nas quais as palavras são substituídas por símbolos.

O primeiro a ter a idéia de usar linguagens artificiais foi o matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), no século XVII. Sua idéia era de desenvolver uma *lingua philosophica*, ou *characteristica universalis*, que seria uma linguagem artificial espelhando a estrutura dos pensamentos. Ao lado disso, ele propôs o desenvolvimento de um *calculus ratiocinator*, um cálculo que permitiria tirar automaticamente conclusões a partir de premissas representadas na *lingua philosophica*. Assim, quando homens de bem fossem discutir algum assunto, bastaria traduzir os pensamentos para essa linguagem e calcular a resposta: os problemas estariam resolvidos.

Embora Leibniz tenha feito essa proposta, ele não chegou a desenvolvê-la. A lógica, na verdade, só começou a fazer uso de linguagens artificiais no século XIX, primeiro, modestamente, com os trabalhos de G. Boole, e, finalmente, em sua plena forma, em 1879, com a publicação da *Conceitografia* de Gottlob Frege, de quem já falamos no capítulo anterior. Hoje em dia, é impossível pensar a lógica sem linguagens artificiais.

Uma linguagem artificial consiste em um conjunto de símbolos básicos, ou caracteres, chamado de *alfabeto* da linguagem, junto com uma *gramática* (ou *regras de formação*), um conjunto de regras que dizem como combinar estes símbolos para formar as expressões bem-formadas da linguagem, como os *termos* e as *fórmulas* (o que corresponde, digamos, às palavras e sentenças do português). No capítulo 6, vamos começar a investigar uma dessas linguagens, mas, para dar desde já um exemplo de linguagem artificial, citemos a linguagem da aritmética. O alfabeto compreende símbolos como '=', '+', '0', '1' etc., e há um conjunto de regras (que não iremos ver aqui) que nos permitem dizer que esta combinação de símbolos,

$$4+5=9,$$

é uma fórmula da aritmética, enquanto a próxima,

$$>+6==<,$$

obviamente não é.

3.3 Uso e menção

Talvez você tenha notado que, na seção anterior, e também nos primeiros capítulos, vim fazendo uso, em várias ocasiões, de aspas simples ao redor de certas expressões e símbolos. Por exemplo, eu dizia coisas como:

A palavra 'gato' começa com um 'g'.

O alfabeto compreende símbolos como '=', '+', '0', '1' etc.

Vamos ver agora a razão desse procedimento. Você sabe que usamos expressões lingüísticas para falar de coisas e de pessoas. Por

exemplo, uso a *palavra* 'Sócrates' para falar do *filósofo* Sócrates, quando quero dizer que

Sócrates era um filósofo grego e foi mestre de Platão.

Uma expressão lingüística, contudo, além de ser *usada* para falar de certas coisas, pode também ser *mencionada*, isto é, pode-se *falar a respeito dela*. Para que isso fique mais claro, considere os exemplos abaixo:

Miau é um gato. (1)

'Miau' tem quatro letras. (2)

Na sentença (1), a palavra 'Miau' está sendo usada para falar do próprio Miau, afirmando que ele é um gato. Na sentença (2), por outro lado, não estamos mais falando de Miau, mas da palavra que é o *nome* de Miau, dizendo, dessa palavra, que ela tem quatro letras. Dito de outra forma, enquanto em (1) a palavra 'Miau' está sendo usada, em (2) ela está sendo mencionada. Essa é a distinção que se costuma fazer entre *uso* e *menção* de uma expressão lingüística.

3.3.1 Nomes de expressões

Quando mencionamos uma expressão lingüística, isto é, quando falamos dela, precisamos usar obviamente o seu nome. (Afinal, quando falamos de Sócrates, usamos o nome de Sócrates.) Mas como é que indicamos que estamos tratando do nome de uma expressão lingüística e não do que ela representa?

É bastante simples: basta destacar a expressão por meio de algum recurso convencional, como viemos fazendo até agora utilizando-nos das aspas simples. Assim, para falar da palavra 'gato', precisamos usar seu nome, que é simplesmente obtido colocando-se aspas simples ao redor da palavra em questão: 'gato'. Desta forma, podemos afirmar que

O nome de Miau é 'Miau'.

Isto é, o nome do gato Miau é a palavra 'Miau'. Note que não é correto dizer que 'Miau' é um gato. 'Miau' não é um gato, mas uma

palavra do português; é o nome de um gato. Da mesma maneira, é falso dizer que Miau tem quatro letras. Miau, sendo um gato, não tem quatro letras. (Ele tem de fato quatro *patas*, mas isto não é a mesma coisa.)

Considere agora a seguinte sentença, e diga se ela é verdadeira ou não:

O nome de 'Miau' é "Miau".

Se você pensar um pouco, vai concluir que ela é verdadeira, é claro. Se 'Miau' é o nome de um gato, "Miau" é o nome de 'Miau' — é o nome do nome do gato. Como você vê, o procedimento de colocar aspas simples em torno de uma expressão, para formar seu nome, pode ser repetido quantas vezes quisermos. Desta maneira criamos nomes, nomes de nomes, e assim por diante.

É claro que as sentenças, sendo expressões lingüísticas, também têm nomes. Quando queremos dizer, por exemplo, que uma certa sentença é verdadeira, não estamos usando a sentença — estamos falando dela e, para tanto, devemos usar seu nome, que é obtido colocando-se a dita sentença entre aspas. Como abaixo:

'A neve é branca' é verdadeira. (3)

"A neve é branca' é verdadeira' é uma sentença do português. (4)

A sentença (3) fala a respeito de outra sentença, a saber, 'A neve é branca', dizendo dela que é verdadeira. Do mesmo modo, (4) fala a respeito de (3), afirmando desta que é uma sentença do português. Nos dois casos, como você percebe, precisamos usar o nome da sentença da qual falamos.

Além de expressões do português, símbolos de linguagens artificiais também precisam de nomes, se quisermos falar a respeito deles. Por exemplo, você certamente se recorda, das aulas de matemática, da diferença entre *numeral* e *número*. Enquanto um número é um certo tipo de objeto matemático, um numeral é o *nome* de um número. Assim, se é correto dizer que

4 é um número,

seria incorreto dizer que

4 é um numeral.

Isto é falso, segundo nossa convenção até agora, pois 4 é o número. O correto seria

'4' é um numeral,

da mesma forma que

'IV', em algarismos romanos, é também um nome do número 4.

Para testar se você compreendeu bem o que foi dito até agora, tente fazer os exercícios a seguir:

Exercício 3.1 Diga se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas:

(a) 'O nome da rosa' é o título de uma obra de Umberto Eco.
(b) Stanford tem oito letras.
(c) '3 + 1' é igual a '4'.
(d) 'Pedro Álvares Cabral' descobriu o Brasil.
(e) A palavra 'Logik' não é uma palavra do português.
(f) "Logik" não pode ser usada como sujeito de uma sentença do português.
(g) "Pedro" não é o nome de Sócrates, mas é o nome de 'Pedro'.
(h) Há um livro de James Joyce cujo nome é Ulisses.

Exercício 3.2 Coloque aspas, ou não, nas afirmações abaixo, de modo a torná-las verdadeiras.

(a) Rosa é dissílaba.
(b) Napoleão foi imperador da França.
(c) Sócrates é o nome de um filósofo grego.
(d) A palavra water tem o mesmo significado que a palavra portuguesa água.
(e) A expressão Rosa é o nome da palavra Rosa, que, por sua vez, é o nome de Rosa.
(f) A sentença nenhum gato é preto é falsa.
(g) Todavia e contudo, mas não também, têm o mesmo significado que mas, contudo, não, não.
(h) O numeral 8 designa a soma de 4 mais 4.
(i) 2 + 2 é igual a 3 + 1, mas 3 + 1 é diferente de 4.

3.3.2 Uma simplificação

Agora que você fez os exercícios acima e entendeu como funciona o uso das aspas, vamos simplificar um pouco as coisas. Quando tratamos de símbolos de linguagens artificiais, existe uma outra maneira de formar nomes, muito usada em textos de lógica e matemática. Para evitar o uso excessivo de aspas, costuma-se convencionar que os símbolos, bem como as expressões construídas com eles, *são também seus próprios nomes*.

A justificativa para essa maneira de gerar nomes é que os símbolos de nossas linguagens artificiais estão geralmente em itálico (como, por exemplo, 'a'), ou são facilmente identificáveis (como '$\rightarrow$', '+'). Como o perigo de confusões, então, é bem reduzido, vamos usar essa alternativa neste livro. Continuaremos usando aspas simples para formar nomes de expressões do português, mas, ao tratar de uma linguagem artificial, em vez de escrevermos, por exemplo,

'x', '1', e '+' aparecem na expressão '$x+1$',

iremos escrever simplesmente

x, 1, e + aparecem na expressão $x+1$,

o que torna a leitura mais agradável. E, com um pouco de cuidado, as confusões podem ser evitadas.

Por outro lado, se for necessário, em algumas ocasiões especiais usaremos aspas também para expressões de linguagens artificiais — por questões de clareza ou de estilo. Para dar um exemplo de uma confusão que pode surgir, considere a sentença abaixo:

$3+1$ é diferente de 4.

Você pode dizer, e com razão, que esta sentença está expressando uma proposição falsa. Afinal, como todos aprendemos na escola, somando 3 e 1 vamos obter 4. Por outro lado, se estamos usando a convenção de que símbolos e expressões de linguagens artificiais são seus próprios nomes, a sentença acima poderia, na verdade, estar querendo dizer o seguinte:

'$3+1$' é diferente de '4',

o que, obviamente, expressa uma proposição verdadeira, uma vez que *as expressões* '3 + 1' e '4' são, de fato, diferentes.

Como eu disse, porém, com um pouco de cuidado, as confusões podem ser evitadas e, quando houver risco de acontecerem, colocarei aspas.

3.4 Linguagem-objeto e metalinguagem

Como você notou, em várias ocasiões, na seção anterior, estivemos usando uma linguagem para falar de expressões dessa própria linguagem. Isso indica a presença de diferentes níveis de discurso; por exemplo, se dizemos que a palavra 'Logik' não é uma palavra do português, estamos fazendo uma afirmação, em português, sobre uma palavra do alemão. Considere agora a sentença abaixo:

'The cat is on the mat' é uma sentença em inglês.

Aqui estamos, em português, falando sobre uma sentença do inglês. Para usar uma distinção introduzida por Alfred Tarski em 1931, o inglês neste caso está sendo uma *linguagem-objeto* (isto é, a linguagem *da qual* se fala), enquanto o português está sendo uma *metalinguagem* (a linguagem *com a qual* se fala). Note que isso é algo relativo, pois poderíamos ter o caso inverso:

'Miau é um gato' is a grammatical sentence in Portuguese,

em que o português estaria sendo a linguagem-objeto e o inglês, a metalinguagem.

Note, finalmente, que o português pode ser a sua própria metalinguagem: é quando falamos do português, usando português.

Essa hierarquia de linguagens pode ser estendida a vários níveis: uma linguagem-objeto, uma metalinguagem, uma meta-metalinguagem etc. O que nos vai interessar é que, na lógica, vamos estudar certas linguagens artificiais — que serão nossas linguagens-objeto — usando o português, acrescido de alguns símbolos, como metalinguagem.

3.5 O uso de variáveis

As variáveis são coisas que, com certeza, você conhece bem: afinal, você passou por vários anos de matemática na escola. Mas, em todo o caso, vamos dar uma rápida recapitulada.

Suponhamos que você quisesse expressar uma lei aritmética como aquela a respeito do quadrado da soma de dois números quaisquer. Você poderia dizer algo como:

> o quadrado da soma de dois números quaisquer é igual ao quadrado do primeiro número, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

No entanto, essa formulação em português é obviamente complicada e difícil de apreender. Tudo ficaria muito mais simples de visualizar se você usasse, em vez do palavreado acima, a expressão

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Concorda? Mas o que são essas coisas que aparecem aí, 'x' e 'y'? Obviamente não são o nome de algum número em particular (como '4' é o nome de 4), mas indicam indivíduos de um certo domínio: as letras x e y podem ser usadas para falar de dois números naturais quaisquer. Usando estas variáveis, você pode dizer coisas como: se x e y são dois números racionais quaisquer, então $x+y=y+x$.

Resumindo, o uso de variáveis permite a você fazer generalizações de uma forma inteligível. E isso não se resume à matemática, mas aparece também na vida cotidiana. Por exemplo:

> Se uma pessoa X comete um crime auxiliado por Y, mas Y, tendo sido enganado por X, não tinha consciência de que sua ação era ilegal...

Como você vê, um uso perfeitamente não-matemático de variáveis. (Aliás, nos romances policiais, o criminoso costuma ser designado pela letra X.) Mesmo Aristóteles já havia utilizado variáveis em seus trabalhos sobre lógica — ao dizer, por exemplo, que, de 'Todo A é B' e de 'Nenhum B é C', podemos concluir 'Nenhum A é C'.

Ao usar variáveis, há duas coisas que devem ser esclarecidas: (i) quais são as expressões que podem ser colocadas em seu lugar, ou seja,

quais são as expressões pelas quais podemos substituir uma variável — os *substituendos*; e (ii) quais são os *valores* que uma variável pode tomar, isto é, qual é o seu domínio de variação. Por exemplo, na fórmula $x+y=y+x$ podemos substituir x e y por numerais quaisquer — mas não por nomes de pessoas, como 'Sócrates' ou 'Napoleão'. Neste caso, os substituendos que x e y podem tomar são numerais, e os valores são números. Contrariamente, em 'X é o criminoso', precisamos do nome de alguém para colocar no lugar de X — numerais estariam aqui completamente fora de lugar. Nesse caso, os substituendos que a variável X pode tomar são nomes de pessoas, e os valores, claro, pessoas.

CAPÍTULO 4

CONJUNTOS

Para encerrar esta série de capítulos introdutórios, vamos falar agora um pouco sobre conjuntos. Caso você ainda se lembre bem do que aprendeu na escola, pode pular este capítulo e passar diretamente para o capítulo seguinte — quem sabe voltando a este caso surja alguma dúvida. Mas, se já faz muito tempo desde a última vez que você viu o símbolo $\in$, talvez seja melhor continuar lendo o presente capítulo, e quem sabe até fazer seus exercícios.

4.1 Caracterização de conjuntos

Ao começarmos a falar sobre conjuntos, o primeiro passo deveria ser tentar caracterizá-los de um modo preciso. Mas é naturalmente muito difícil dar uma *definição* de conjunto; o máximo que podemos fazer é tentar uma caracterização intuitiva. A idéia básica é de que conjuntos são *coleções* de objetos. (Outros termos usados são 'classe', 'agregado', e 'totalidade'.) Uma tal caracterização, obviamente, é imprecisa: a idéia de coleção parece implicar que os elementos dessa coleção devam estar de alguma forma fisicamente próximos, ou que tenham alguma coisa em comum. Isso, contudo, não é absolutamente exigido dos elementos de um conjunto — até porque temos, por exemplo, conjuntos infinitos, onde fica difícil falar de proximidade.

Essa idéia intuitiva, contudo, deixa claro que conjuntos são formados por objetos, os quais designamos pela expressão *elementos*. Entre esses elementos, podemos ter também outros conjuntos. Para indicar que um objeto é um elemento de um conjunto, vamos utilizar o símbolo $\in$. Assim, se a letra F designa o conjunto dos filósofos, e a letra s denota Sócrates, podemos representar a sentença 'Sócrates é um filósofo' da seguinte forma:

$$s \in F.$$

No caso negativo — ou seja, quando quisermos dizer, por exemplo, que Sócrates *não pertence* ao conjunto dos filósofos — escrevemos

$$s \notin F.$$

Como vamos representar os conjuntos? Por exemplo, como representar o conjunto formado pelos indivíduos Pedro, Paulo e Maria? Ou o conjunto dos estudantes de filosofia da UFSC? Há pelo menos duas maneiras de fazer isso:

Enumeração: {Pedro, Paulo, Maria},
Descrição: $\{x \mid x$ é um estudante de filosofia da UFSC$\}$.

Na enumeração, fazemos uma listagem de todos os elementos do conjunto. Isso só pode ser feito, contudo, com conjuntos que tenham um número pequeno de elementos, como o conjunto descrito acima, ou que tenham alguma "lei de geração" facilmente reconhecida, como por exemplo o conjunto dos números pares

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

As reticências são usadas para indicar que o conjunto "prossegue" seguindo a mesma relação entre os elementos que vinha sendo usada até então (ou seja, de que cada elemento é igual ao anterior, somado com 2).

Não se aplicando nenhum desses casos, a solução é fazer uma descrição do conjunto, o que se consegue por meio de uma *propriedade* comum aos elementos do conjunto, e só a eles, como no caso acima dos estudantes de filosofia da UFSC. Isso é o que fazemos ao

mencionar conjuntos na linguagem do dia-a-dia: conjuntos reúnem elementos que têm alguma coisa em comum, como o conjunto dos brasileiros ou o conjuntos dos professores de violino que moram no Canto da Lagoa. Há uma relação muito estreita entre ter uma certa propriedade e pertencer a um certo conjunto (e, como você vai ver depois, entre relações em geral e certos tipos de conjuntos). De fato, poderíamos dizer que, *grosso modo*, uma propriedade determina um conjunto. Tomemos como exemplo a propriedade de ser um professor de matemática. A partir dela, podemos determinar um conjunto P, a saber, o conjunto de todos os elementos x tal que x é um professor de matemática.

Entretanto, na teoria de conjuntos, não fazemos a restrição de que deve haver uma propriedade comum aos elementos do conjunto. Assim, o conjunto S, a seguir, é um conjunto perfeitamente legítimo:

$$\{\text{Claudia Schiffer, o planeta Marte}, \sqrt{2}, \textit{Dom Casmurro}\}.$$

Poderíamos, contudo, dizer, de um modo trivial, que há uma propriedade correspondendo a este conjunto: a propriedade 'x é um elemento de S'. (Agora, é claro que não podemos usar esta "propriedade" para *definir* o conjunto S, pois teríamos, então, uma definição circular.)

Exercício 4.1 Expressar em símbolos:

(a) b é um elemento de A
(b) k não é um elemento de B
(c) o conjunto consistindo nos elementos a, b e c
(d) b é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, b e c
(e) o conjunto $\{b\}$ é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, c, e no conjunto $\{b\}$

4.2 Conjuntos especiais

Alguns conjuntos merecem consideração à parte. Por exemplo, dada a propriedade 'x é diferente de si mesmo', podemos formar o seguinte conjunto:

$$\{x \mid x \text{ é diferente de } x\}.$$

Como, obviamente, não há um indivíduo que seja diferente de si próprio, o conjunto acima definido não tem elementos: é o chamado *conjunto vazio*, que denotaremos pelo símbolo $\varnothing$. Analogamente, há o conjunto dos x que são idênticos a si mesmos: isto inclui todos os objetos do universo. Temos neste caso, portanto, o *conjunto universo*, que podemos denotar por U.

É preciso aqui fazer um comentário a respeito do assim chamado "universo". Na verdade, não existe um conjunto *universal*, contendo *todas* as entidades do universo — o qual incluiria os outros conjuntos e também a si mesmo. (Ver observações a respeito ao final deste capítulo.) Assim, ao falarmos de 'conjunto universo', queremos com isso indicar apenas o conjunto das entidades que nos interessa estudar num certo momento: o *universo de discurso* de uma certa situação. Por exemplo, se tudo sobre o que estamos falando são gambás e quatis, então o conjunto universo U, neste momento, seria:

$$U = \{x \mid x \text{ é um gambá ou } x \text{ é um quati}\},$$

o que exclui, então, as pessoas, as estrelas, e assim por diante. Numa aula de matemática, o universo incluiria, digamos, todos os números, e apenas eles. Resumindo, o assim chamado conjunto universo é sempre relativo a uma situação específica.

Um outro caso particular são os conjuntos que só têm um elemento: a esses chamamos de *conjunto unitário*. Por exemplo, $\{a\}$, $\{\sqrt{3}\}$, {Salma Hayek} etc.

Exercício 4.2 Há alguma diferença entre Salma Hayek e {Salma Hayek}? E entre os conjuntos $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$?

Voltando a falar do conjunto vazio, até agora estive me referindo *ao* conjunto vazio; mas será que podemos afirmar que há apenas *um* conjunto vazio? Sim; isto é garantido pelo chamado *Princípio de Extensionalidade*, que poderia ser formulado da seguinte maneira: se temos dois conjuntos, A e B, com exatamente os mesmos elementos, então se trata do mesmo conjunto, e não de conjuntos diferentes. Ou seja, $A = B$. Em outras palavras, para um conjunto A ser diferente de um conjunto B, é preciso que haja pelo menos um elemento em

A que não esteja em B, ou vice-versa. Dessa forma, só há *um* conjunto vazio: se houvesse dois candidatos distintos, um deles teria de conter um elemento que não se encontrasse no outro. Por definição, contudo, o conjunto vazio não contém nenhum elemento.

Uma conseqüência interessante do princípio de extensionalidade é que há várias maneiras de escolher os elementos de um conjunto, ou seja, de caracterizar um conjunto. Por exemplo, seja A o conjunto dos triângulos equiláteros e B o conjunto dos triângulos equiângulos: A e B são o mesmo conjunto, uma vez que um triângulo é equilátero se e somente se for equiângulo. Ou: seja A o conjunto dos homens que foram Miss Universo, e B o conjunto dos gatos que viajaram a Saturno. Mais uma vez, A e B são o mesmo conjunto — neste caso, o conjunto vazio, $\varnothing$. (Que eu saiba, nenhum homem foi Miss Universo, e nenhum gato viajou até Saturno.)

Contudo, as expressões 'equilátero' e 'equiângulo' têm um significado diferente, e 'x é um triângulo equilátero' e 'x é um triângulo equiângulo' são propriedades diferentes. É o que se costuma denominar *intensão* (ou *conotação*) de um termo, em contrapartida à sua *extensão* (ou *denotação*). Consideremos a expressão 'os cachorros que têm orelhas felpudas': essa expressão se refere a certos indivíduos no universo especificando uma propriedade que é comum a todos eles. O conjunto desses indivíduos constitui a *extensão* da expressão acima, enquanto o modo pelo qual eles são referidos (os critérios usados para determinar a extensão da expressão) constituem sua *intensão.*

4.3 Relações entre conjuntos

O princípio de extensionalidade nos permite definir uma relação entre conjuntos: a relação de *inclusão.* Se cada elemento de um conjunto A for também elemento de um outro conjunto B, dizemos que *A está contido em B*, ou que *A é um subconjunto de B*, e representamos esse fato da seguinte maneira:

$$A \subseteq B.$$

Isso pode ser traduzido pela expressão 'Todo (elemento de) A é (elemento de) B'. Note que, mesmo que A e B sejam o mesmo con-

junto, ainda é verdadeiro que $A \subseteq B$. Podemos definir, contudo, uma relação de *inclusão própria* entre dois conjuntos:[1]

$$A \subset B =_{df} A \subseteq B \text{ e } A \neq B.$$

Neste caso, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B, ou que A *está propriamente contido em* B.

E, claro, quando A e B têm exatamente os mesmos elementos, eles são o mesmo conjunto, o que representamos escrevendo que

$$A = B,$$

como vimos acima.

A partir dessas definições de inclusão entre conjuntos, algumas propriedades muito gerais podem ser demonstradas, como por exemplo:

Proposição 4.1 *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então:*

(a) $\varnothing \subseteq A$;
(b) $A \subseteq A$;
(c) *se* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq C$ *então* $A \subseteq C$;
(d) *se* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$ *então* $A = B$;
(e) *se* $A \subset B$ *então* $A \neq B$.

Prova. É fácil ver que a propriedade (a), por exemplo, deve ser verdadeira. Suponhamos que não seja o caso que $\varnothing \subseteq A$. Então deve existir algum elemento $a \in \varnothing$ e $a \notin A$. Mas é impossível que tenhamos algum $a \in \varnothing$, pois o vazio não tem elementos. Logo, $\varnothing \subseteq A$. Vamos agora considerar (c). Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Por definição, todo elemento de A pertence a B, e todo elemento de B pertence a C. É imediato, então, que qualquer elemento de A é também elemento de C. Logo, $A \subseteq C$.

Exercício 4.3 Tente demonstrar, como eu fiz acima, as propriedades (b), (d) e (e) da proposição anterior.

[1] Vou utilizar a notação '$=_{df}$' para indicar que a expressão à esquerda pode ser definida por meio daquela do lado direito.

4.4 Operações sobre conjuntos

Uma outra maneira de caracterizar conjuntos, além de enumeração ou descrição, é gerá-los através de algumas operações. Por exemplo, dados dois conjuntos A e B, podemos formar o *conjunto união* de A e B, que denotaremos por

$$A \cup B.$$

Por definição, o conjunto $A \cup B$ contém todos os elementos que são ou elementos de A ou elementos de B. Ou seja:

$$A \cup B =_{\text{df}} \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Uma outra operação é a de *intersecção*: um elemento x pertence à intersecção de A e B se x pertence tanto a A quanto a B. Ou seja, a intersecção de dois conjuntos é o conjunto que contém os *elementos comuns* aos dois. Em símbolos, $A \cap B$, o que podemos definir da seguinte maneira:

$$A \cap B =_{\text{df}} \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Ainda uma terceira operação é a de *complemento*: dado um universo U, e um conjunto A contido em U, o complemento de A, em símbolos $\overline{A}$, é o conjunto de todos os elementos que não pertencem a A. Ou seja:

$$\overline{A} =_{\text{df}} \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

Além das operações de união, intersecção e complemento, temos ainda a *diferença* entre conjuntos, que representamos por $A - B$. Um elemento x pertence ao conjunto $A - B$ se x pertence a A, mas não a B. Podemos definir isto da seguinte maneira:

$$A - B =_{\text{df}} \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Analogamente, $B - A$ consiste em todos os elementos de B que não estão em A.

Dado um conjunto A, podemos também formar o *conjunto potência* de A (ou conjunto das *partes* de A), que corresponde ao conjunto de

todos os subconjuntos de A, e que denotaremos por $\mathcal{P}(A)$. Podemos defini-lo assim:

$$\mathcal{P}(A) =_{\mathrm{df}} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, temos que

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

De um modo geral, se um conjunto A tem n elementos, $\mathcal{P}(A)$ terá 2^n elementos. Seja $B = \{0, 1, 2\}$. Então $\mathcal{P}(B)$ tem 8 elementos, a saber:

$$\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Uma última operação entre conjuntos que iremos ver é o *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B, mas para isto vamos precisar da noção de um *par* de elementos. Assim como chamávamos a um conjunto de um elemento de *conjunto unitário*, podemos chamar a um conjunto de dois elementos de *par*. Assim definido, um par é um conjunto e, como qualquer conjunto, não tem uma relação de ordem. Deste modo, é válido o seguinte:

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Por outro lado, se quisermos considerar que os elementos de um par tenham uma certa ordem — isto é, falar em termos de primeiro e segundo elementos do par —, podemos introduzir a noção de *par ordenado*. Para indicar um par ordenado, não usaremos mais as chaves (que continuam denotando conjuntos), mas os símbolos $\langle$ e $\rangle$. Assim, o par ordenado constituído pelos elementos a e b pode ser representado como $\langle a, b\rangle$, que, obviamente, é diferente do par ordenado $\langle b, a\rangle$. Um par ordenado $\langle x, y\rangle$ só é idêntico a um par ordenado $\langle z, w\rangle$ se $x = z$ e $y = w$.

Gostaria de enfatizar que pares ordenados são um tipo particular de conjunto. E se você está imaginando como é que vamos obter a idéia de ordem a partir de conjuntos (que não têm ordem), o pequeno truque a seguir resolve a questão. Podemos definir um par ordenado $\langle x, y\rangle$ da seguinte maneira:

$$\langle x, y\rangle =_{\mathrm{df}} \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

É fácil ver, a partir dessa definição, que o par $\langle a,b\rangle$, por exemplo, é mesmo diferente de $\langle b,a\rangle$. Pela definição, temos que

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\},$$

e que

$$\langle b,a\rangle = \{\{b\},\{b,a\}\}.$$

Obviamente, $\{\{a\},\{a,b\}\}$ é diferente de $\{\{b\},\{b,a\}\}$.

A noção de par ordenado pode ser ainda generalizada: é assim que podemos falar de *triplas ordenadas*, que são conjuntos de três elementos com uma ordem, por exemplo, as triplas $\langle a,b,c\rangle$ e $\langle b,c,a\rangle$, que, naturalmente, são diferentes. De modo análogo, temos as *quádruplas ordenadas*, e, no caso geral, seqüências ordenadas $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ de n elementos — as *n-uplas*, ou *ênuplas*. Uma tripla ordenada $\langle x,y,z\rangle$ pode ser definida a partir de um par ordenado, o par $\langle x,\langle y,z\rangle\rangle$ — e assim por diante.

Agora, o produto cartesiano de dois conjuntos A e B, que denotamos por $A\times B$, é simplesmente o conjunto dos pares ordenados $\langle x,y\rangle$, onde $x\in A$ e $y\in B$. Ou seja:

$$A\times B =_{\text{df}} \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \text{ e } y\in B\}.$$

Para dar um exemplo, se $A=\{1,2\}$ e $B=\{a,b\}$, o produto cartesiano é

$$A\times B = \{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}.$$

O produto cartesiano pode ainda ser generalizado para mais conjuntos: $A\times B\times C$ será, assim, um conjunto de triplas ordenadas, com o primeiro elemento de A, o segundo de B e o terceiro de C. No caso geral, o produto de n conjuntos, naturalmente, será um conjunto de ênuplas.

Você pode também fazer o produto cartesiano de um conjunto por ele mesmo. Neste caso, costuma-se usar A^2 para denotar $A\times A$; A^3 para $A\times A\times A$ etc. Obviamente, A^n denota o produto de A por A n vezes, e A^1 é o próprio A.

Exercício 4.4 Expressar em símbolos:

(a) A é um subconjunto de B

(b) A é um subconjunto próprio de B
(c) o conjunto união de D e S
(d) c é elemento da intersecção de A e B
(e) a é um elemento do complemento de B
(f) a não é um elemento do complemento da união de M e N

Exercício 4.5 Quais das seguintes afirmações são verdadeiras, e quais são falsas?

(a)	$c \in \{a,c,e\}$	(g)	$\{a\} \in \{b,\{a\}\}$
(b)	$e \notin \{a,b,c\}$	(h)	$\{a\} \in \{c,\{b\},a\}$
(c)	$\{0,1,2\} \subset \{0,1,2\}$	(i)	$c \in \{a,b\} \cup \{d,c,e\}$
(d)	$\{0,1,2\} \subseteq \{0,1,2\}$	(j)	$\varnothing \subseteq \{a,b,c\}$
(e)	$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$	(k)	$\{0,1,2\} \subset \{3,2,5,4,6\}$
(f)	$a \in \{b,\{a\}\}$	(l)	$\{1,b\} \subseteq \{1,b,c\} \cap \{4,d,1,f,b\}$

Exercício 4.6 Sejam A, B e C os seguintes conjuntos:
$A = \{x,y,z\}$ $B = \{2,4\}$ $C = \{\pi\}$ $D = \{a,b\}$ $E = \{1,4,8\}$ $F = \{4\}$
Calcule:

(a)	$A \times B$	(g)	$D \times (B - E)$
(b)	$B \times C$	(h)	$(B \cap E) \times F$
(c)	$B \times A$	(i)	$(E \cup F) \times D$
(d)	$D \times F \times B$	(j)	$(C \cup F) \times (A - \{x\})$
(e)	$C \times F \times A$	(k)	$\mathcal{P}(A)$
(f)	$E - B$	(l)	$\mathcal{P}(B)$

4.5 Propriedades e relações

Vamos, agora, discutir com um pouco mais de detalhes a idéia de que a conjuntos correspondem propriedades e vice-versa. O problema com essa formulação é que ela é muito liberal. Se usarmos uma propriedade como 'não pertence a si mesmo', teremos o *paradoxo de Russell*, assim chamado em referência ao filósofo, lógico e matemático inglês Bertrand Russell (1872–1970), que o formulou. Podemos tomar essa propriedade para definir o seguinte conjunto:

$$R = \{x \mid x \text{ não pertence a } x\}.$$

Agora seria lícito perguntar se $R \in R$ ou $R \notin R$. Suponhamos que $R \in R$. Então R tem a propriedade de não pertencer a si mesmo, o que significa que $R \notin R$. E, claro, se $R \notin R$, então R não pertence a si mesmo; logo, ele tem a propriedade que define R, e concluímos que $R \in R$. Assim, derivamos uma contradição: $R \in R$ se e somente se $R \notin R$.

O cuidado que se deve tomar é fazer uma restrição nessa idéia geral: dado um conjunto A e uma propriedade P, então podemos determinar o subconjunto de A formado por aqueles elementos de A que têm a propriedade P.

Como vimos acima, a uma propriedade pode-se fazer corresponder um conjunto (guardados certos cuidados) dos elementos que têm aquela propriedade. Mas como tratar o caso de, por exemplo, uma relação binária?

É aqui que o conceito de par ordenado vai nos ajudar a modelar relações binárias. Uma relação binária, como 'x é pai de y', envolve dois indivíduos. Por exemplo, quando dizemos que João é pai de Maria, temos dois indivíduos relacionados: João e Maria. É importante observar aqui que uma noção de ordem se faz necessária: 'João é pai de Maria' pode muito bem ser verdadeira para um certo João e uma certa Maria, enquanto 'Maria é pai de João' certamente não o é. (As relações 'x é *mãe* de y' e 'x é *filha* de y', naturalmente, são outras relações.)

Assim, uma relação binária pode ser representada por meio de *um conjunto de pares ordenados*, a saber, o conjunto daqueles pares onde o primeiro é o pai do segundo. Para dar um exemplo, a relação 'x é pai de y' poderia ser representada pelo seguinte conjunto, onde o primeiro elemento de cada par é pai do segundo:

$$\{\langle \text{João}, \text{Maria}\rangle, \langle \text{João}, \text{Antônio}\rangle, \langle \text{Antônio}, \text{Teresa}\rangle, \ldots\}.$$

Se dois indivíduos a e b estão numa relação R, escrevemos que Rab. No caso particular de relações binárias, é também costumeiro colocar o símbolo da relação *entre* os símbolos dos indivíduos: aRb.

A propósito da relação acima, é claro que existem relações onde aRb equivale a dizer que bRa. Por exemplo, 'x tem a mesma altura que y': se João tem a mesma altura que Maria, então obviamente

Maria tem a mesma altura que João. Esse tipo de relação é chamada de *simétrica*: se x tem a relação R com y, então y tem a relação R com x. Ou seja, xRy implica que yRx. Se temos uma relação em que, para cada indivíduo x, x está na relação R consigo mesmo (isto é, xRx), dizemos que essa relação é *reflexiva*. Além disso, uma relação é chamada *transitiva* se xRy e yRz implica que xRz. Por exemplo, a relação $<$ no conjunto dos números naturais é transitiva: se $x < y$ e $y < z$, então claramente $x < z$. A uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva chamamos de uma *relação de equivalência*.

Essa noção de relação binária pode naturalmente ser estendida se considerarmos outros tipos de estruturas além de pares ordenados. Uma relação ternária, por exemplo, como 'x está entre y e z', corresponde a um conjunto de triplas ordenadas, e assim por diante. No caso geral, podemos representar uma relação n-ária (ou seja, envolvendo n indivíduos) através de um conjunto de ênuplas.

4.6 Funções

Um outro conceito importante a considerar é o de uma *função*, que é um tipo muito particular de relação. Comecemos com um exemplo: suponhamos que cada filósofo tenha um número de RG — o que podemos representar como no diagrama abaixo:

$$\begin{bmatrix} \text{Kant} & \longrightarrow & 1234567 \\ \text{Descartes} & \longrightarrow & 7654321 \\ \text{Platão} & \longrightarrow & 6969696 \\ & \ldots & \end{bmatrix}$$

Este diagrama representa, assim, a função 'o RG de x'. Poderíamos representar isso também por um conjunto de pares ordenados $\langle x,y\rangle$, da seguinte maneira:

$$\{\langle x,y\rangle \mid y = \text{o RG de } x\}.$$

Ou seja, teríamos algo como

$$\{\langle \text{Kant}, 1234567\rangle, \langle \text{Descartes}, 7654321\rangle, \langle \text{Platão}, 6969696\rangle, \ldots\}.$$

A cada primeiro elemento, x, do par nós *atribuímos* o segundo elemento, y, do par. Tal atribuição é chamada de *função*. Para que uma relação entre dois conjuntos A e B seja uma função, deve haver no conjunto B exatamente um elemento para cada elemento em A. Pode acontecer que a vários elementos de A tenha sido atribuído o mesmo elemento de B. Por exemplo, a cada pessoa corresponde um lugar de nascimento. Isto caracteriza uma função, pois nenhuma pessoa nasceu em dois lugares diferentes, embora, por outro lado, haja várias pessoas que nasceram no mesmo lugar. Por outro lado, a relação 'x é pai de y' não é uma função, pois a um homem podem corresponder vários indivíduos de quem ele é o pai.

Sejam A e B dois conjuntos, e f uma função de A em B. O conjunto A é então chamado de *domínio* de f, e B, de *contradomínio* de f. Os elementos do domínio A são chamados de *argumentos* da função f, e os de B, de *valores* de f. Um elemento de B que é associado por f a um elemento de A é chamado de uma *imagem*. A aplicação de f a algum elemento $x \in A$ é representada por $f(x)$. Assim, representamos o fato de que y é a imagem de x pela função f escrevendo

$$f(x) = y.$$

O conjunto dos valores que são imagens por f de algum elemento de A é chamado de *conjunto imagem* de f. Note que o conjunto imagem de f não é necessariamente idêntico ao contradomínio B — mas certamente será um subconjunto dele.

Caso o conjunto imagem de uma função f seja igual a seu contradomínio, dizemos que esta função é *sobrejetora*. Ou seja, não há um elemento do contradomínio que não seja imagem de algum elemento do domínio. Se cada elemento do domínio de f tem uma imagem diferente, dizemos que a função é *injetora*, isto é, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$. Uma função injetora e sobrejetora é dita uma *bijeção*, também chamada de *correspondência biunívoca*.

Exercício 4.7 Dê um exemplo de domínio e conjunto imagem para que tenhamos as seguintes funções:

(a) 'o local de nascimento de x'

(b) 'a esposa de x' (numa sociedade monogâmica, claro!)

(c) 'o marido de x' (idem!)
(d) 'a data de nascimento de x'
(e) 'o pai biológico de x'
(f) 'a idade de x'
(g) 'o diâmetro de x'
(h) 'a capital de x'
(i) 'o filho mais velho de x'
(j) 'a raiz quadrada de x'

4.7 Conjuntos infinitos

Vários dos conjuntos que vimos até agora tinham um número finito de elementos. Por exemplo, o conjunto $\{a,b,c\}$ tem três elementos, o conjunto $\{2\}$ tem um elemento, o conjunto vazio não tem elementos etc. Existem, contudo, conjuntos com um número infinito de elementos, e você conhece vários deles. Para mencionar alguns:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0,1,2,3,\ldots\}, \\ \mathbb{Z} &= \{-2,-1,0,1,2,\ldots\}, \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\right\} \end{aligned}$$

— respectivamente, o conjunto dos números naturais, dos números inteiros, e dos racionais.

Os conjuntos infinitos têm algumas características próprias, começando pela questão de quantos elementos eles têm. Por exemplo, quantos elementos tem o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais? No caso de um conjunto finito, em princípio, podemos dizer quantos elementos ele tem contando esses elementos. Na prática, isso pode ser um pouco demorado. Tome o conjunto dos habitantes de Florianópolis, por exemplo. Se você fosse contar todos eles, com certeza, chegaria ao último, pois Florianópolis tem um número finito de habitantes — mas isso aconteceria depois de muito, muito tempo. Num conjunto infinito, claro, jamais terminaríamos de contar, pois sempre há mais um elemento.

Podemos dizer que dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se há uma correspondência biunívoca entre eles, isto

é, uma função que associa a cada elemento de A um e somente um elemento de B, e vice-versa: a cada elemento de B um e somente um elemento de A. Num cinema lotado, supondo que ninguém está em pé ou sentado no chão, o número de assentos corresponde exatamente ao número de espectadores. Logo, o conjunto de assentos e o conjunto de espectadores têm o mesmo número, a mesma *cardinalidade*.

Um conjunto A é *maior* que um conjunto B se existe uma função injetora de B em A, mas não vice-versa. Por exemplo, o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ é maior que o conjunto $B = \{1, 2, 3\}$. A função

$$f(1) = a, \qquad f(2) = b, \qquad f(3) = c,$$

é uma injeção de B em A; porém, não é possível ter uma função de A em B tal que a cada elemento de A corresponda um elemento *diferente* de B. (Lembre que, para termos uma função, nenhum elemento do domínio pode ficar sem uma imagem.)

Com relação agora ao número de elementos de conjuntos infinitos, há algumas coisas interessantes a observar. Galileu (1564–1642) já havia notado, por exemplo, que o conjunto P dos números naturais pares e o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais têm o mesmo número de elementos — não obstante ser P um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$. É fácil ver isto:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ P & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$$

O diagrama acima mostra que há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e P. A cada $n \in \mathbb{N}$ fazemos corresponder o elemento $2n$ em P. Assim, se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade quando há uma correspondência biunívoca entre eles, concluímos que P e $\mathbb{N}$ têm, afinal, o mesmo número de elementos.

Isso é surpreendente, e deixou Galileu desanimado quanto à possibilidade de se poder tratar de conjuntos infinitos de diferentes tamanhos. Já o matemático alemão Georg Cantor (1845–1918), no século XIX, não se incomodou com isso e mostrou que não só os naturais e os pares têm a mesma cardinalidade, mas também que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ têm a mesma cardinalidade. Veja:

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

Se, em vez de contar da esquerda para a direita, iniciando no infinito negativo e indo até o infinito positivo, arranjarmos $\mathbb{Z}$ numa outra ordem, como no diagrama acima, obviamente temos uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, o que mostra que eles têm a mesma cardinalidade. Mais surpreendentemente ainda, Cantor mostrou que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ têm o mesmo número de elementos. Isso é fantástico, pois sabemos que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é *denso* — isto é, entre dois números racionais quaisquer, como 0 e 1, existem infinitamente muitos outros racionais (como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ etc.). Desse modo, seria de esperar que o conjunto $\mathbb{Q}$ fosse estritamente *maior* que $\mathbb{N}$. Como podem $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ ter, então, a mesma cardinalidade?

Cantor mostrou que isso, de fato, é assim. Considere a figura 4.1, onde representamos os racionais não-negativos por meio de frações.

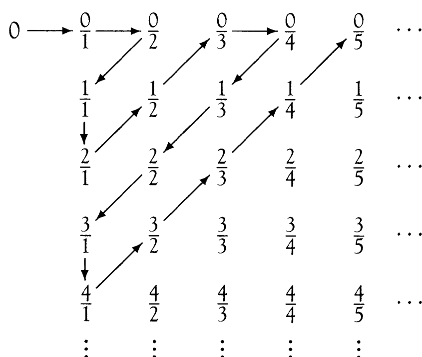


FIGURA 4.1 — Os números racionais.

Se formos agora seguindo as setas e anotando cada fração encontrada, obteremos uma lista de todos os racionais: o primeiro, o segundo, o terceiro, e assim por diante, como abaixo:

$$0, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \dots$$

Note que não deixaremos nenhum racional escapar procedendo dessa maneira.

Transformando agora frações em inteiros sempre que possível, e eliminando depois disso os elementos repetidos, ficamos com a lista abaixo, que, naturalmente, pode ser colocada em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$, mostrando então que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Q} & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \dots \end{array}$$

Os conjuntos que têm a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$ — isto é, que podem ser colocados em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$ — chamamos de *enumeráveis*. Isso porque podemos construir uma lista infinita — uma *enumeração* — dos elementos do conjunto, de modo que podemos ir percorrendo a lista e, eventualmente, encontrar qualquer elemento do conjunto. Usualmente, denota-se o número de elementos dos conjuntos enumeráveis por $\aleph_0$ (o que é pronunciado "alef-zero").

Aos conjuntos que são ou finitos ou enumeráveis chamamos de *contáveis*.

Pode parecer, em função dos resultados de Cantor, que todos os conjuntos sejam contáveis, mas não é o caso: existem conjuntos infinitos que não são enumeráveis, como o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, e a prova disso — também feita por Cantor — é realmente linda.

Primeiro, note que os números reais podem ser representados por decimais infinitas, como 0,33333..., ou 3,141591... etc. Mesmo números inteiros, como 4, podem ser representados dessa maneira, como 4,0000... (ou, alternativamente, como 3,99999...).

A prova de Cantor procede agora por redução ao absurdo. (Esse é um tipo de prova em que você supõe o contrário do que quer provar, e mostra que essa suposição leva a um absurdo — e, assim, tem de ser falsa.) Vamos tomar os números reais entre 0 e 1, e supor que podemos fazer uma enumeração deles. Essa lista seria algo como o mostrado na figura 4.2, onde a_1^1 representa o primeiro algarismo (depois da vírgula) do primeiro número; a_2^1 é o segundo algarismo do primeiro número; a_1^2 é o primeiro algarismo do segundo número etc.

$$\begin{array}{lllllll}
0, & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & \dots \\
0, & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & \dots \\
0, & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 & \dots \\
0, & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & \dots \\
0, & a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

FIGURA 4.2 — Uma lista dos reais?

O que Cantor mostrou é que, não importa como você tente construir esta lista de números reais, sempre é possível construir um número real $r = 0, r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$, entre 0 e 1, que não se encontra nela. O procedimento é o seguinte: o primeiro algarismo de r deve ser diferente do primeiro algarismo do primeiro número da lista. Por exemplo, se $a_1^1 = 5$, convencionamos que $r_1 = 6$. Caso contrário (i.e., se $a_1^1 \neq 5$), dizemos que $r_1 = 5$. Em qualquer caso, temos que $r_1 \neq a_1^1$. O segundo algarismo de r deve ser diferente do segundo algarismo do segundo número: da mesma maneira, construímos r_2 de forma que $r_2 \neq a_2^2$. Resumindo, para cada número i na lista, fazemos com que $r_i \neq a_i^i$.

Mas este número r assim construído é um número entre 0 e 1 diferente de todos os números na lista: ele difere do primeiro (no primeiro algarismo), do segundo (no segundo algarismo), do terceiro (no terceiro algarismo), e assim por diante (conforme a linha diagonal na figura 4.2). A conclusão é que não é possível colocar os reais entre 0 e 1 (e, portanto, todos os reais) em correspondência biunívoca com os naturais, pois sempre haverá outros números reais fora dessa correspondência. Logo, o conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável, e tem uma cardinalidade *maior* do que a de $\mathbb{N}$. (Note que existe uma injeção trivial de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, uma vez que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.)

Como você vê, temos mais números reais do que naturais. E como ambos os conjuntos são infinitos, concluímos que há infinitos de vários tamanhos, uns maiores do que os outros. É fácil ver isso por outros meios: há um teorema em teoria dos conjuntos, também de-

monstrado por Cantor, que diz que, para um conjunto A qualquer, a cardinalidade de $\mathcal{P}(A)$ é estritamente maior do que a cardinalidade de A. Segue-se então que a cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é maior que a de $\mathbb{N}$. De onde concluímos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ também não é enumerável.

Essa é, a propósito, uma outra razão pela qual não existe conjunto universal: se houvesse um tal conjunto $\mathcal{U}$, ele deveria conter todos os conjuntos. Porém, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ teria mais elementos ainda — ou seja, elementos não pertencentes a $\mathcal{U}$ —, o que é contraditório, uma vez que estamos supondo que $\mathcal{U}$ contém *tudo*.

E, com isso, encerramos nossa revisão de teoria de conjuntos, assim como esta seqüência de capítulos introdutórios — você está agora pronto/a para a lógica elementar, de que trataremos em seguida.

CAPÍTULO 5

INTRODUÇÃO AO **CQC**

Este capítulo tem por objetivo apresentar informalmente o *cálculo de predicados de primeira ordem*, o sistema de lógica que estaremos estudando na maior parte deste livro.

5.1 Lógicas

Nos capítulos introdutórios, você teve um primeiro contato, ainda que breve, com a idéia de que a validade de um argumento é determinada por sua *forma*: não importa se estamos falando de gatos ou filósofos, qualquer argumento da forma 'Todo *A* é *B*; *c* é um *A*; logo, *c* é *B*' será válido. Dessa maneira, para analisar a validade de um argumento podemos deixar de lado o seu "conteúdo", concentrando-nos apenas em seus aspectos formais. Aristóteles, com sua teoria do silogismo, já havia dado um passo nessa direção, ao substituir alguns termos, como 'gato' e 'mamífero', por variáveis tais como *A*, *B* etc. A lógica contemporânea levou esse processo mais adiante: não apenas usamos letras para indicar certos termos, mas também temos símbolos para outras expressões, como 'todo' e 'algum'. Isto é, a lógica, hoje em dia, faz uso de linguagens artificiais (ou linguagens formais), como já havíamos visto.

A motivação para o uso de tais linguagens é que os argumentos, originalmente apresentados em português, são traduzidos para

uma linguagem cuja estrutura está precisamente especificada (ou seja, evitam-se os problemas de ambigüidade existentes nas linguagens naturais), uma linguagem na qual um argumento terá uma forma imediatamente reconhecível, e para a qual se pode dar uma definição precisa de conseqüência lógica. Assim, uma vez identificadas as premissas e a conclusão de um argumento, o passo seguinte, na determinação de sua validade, consiste na tradução do mesmo para a linguagem formal da teoria lógica que estivermos usando.

A lógica contemporânea, a propósito, não consiste em apenas *uma* teoria lógica: vamos ver mais tarde que existem, hoje em dia, vários sistemas lógicos — ou *lógicas* — diferentes, alguns complementando-se, outros rivalizando entre si. (A teoria do silogismo de Aristóteles é apenas um exemplo de uma teoria lógica simples.) A diversidade desses sistemas se explica a partir de duas coisas: primeiro, algumas lógicas se distinguem por usarem linguagens (artificiais) com poder de expressão diferente. Mesmo a teoria do silogismo já se limitava a argumentos construídos a partir de um tipo determinado de proposição — as proposições categóricas, que são aquelas expressas por sentenças da forma 'Todo *A* é *B*', ou 'Algum *A* não é *B*', para dar dois exemplos. De modo similar, as teorias lógicas contemporâneas também fazem limitações em termos dos tipos de proposição que elas podem adequadamente formalizar,[1] exatamente em função da linguagem que elas empregam. E, em segundo lugar, ainda que utilizem a mesma linguagem formal, as lógicas podem diferir quanto aos princípios fundamentais que aceitam. Enquanto, na lógica clássica, uma dupla negação equivale a uma afirmação — ou seja, 'Não é o caso que Sócrates não é um filósofo' diz o mesmo que 'Sócrates é um filósofo' —, algumas outras lógicas rejeitam esse princípio.

O que você vai aprender neste livro é, basicamente, o que se cha-

---

[1]O uso da palavra 'formalizar', neste livro, necessita um esclarecimento. É comum ouvir alguém falar em 'formalizar um argumento', ou 'formalizar uma sentença ou proposição'. O que se pretende com isso não é nada mais e nada menos do que indicar o processo de tradução do argumento (sentença, proposição) para uma linguagem artificial, como a que você vai aprender a partir do próximo capítulo. Ou seja, a menos que o contrário esteja explicitamente indicado, estarei usando a palavra 'formalizar', e eventualmente também 'simbolizar', como uma abreviação estilística de 'traduzir para uma linguagem formal (artificial)'.

ma *lógica clássica* (mas vamos, ao final, dar uma olhada em algumas lógicas não-clássicas também). A lógica clássica, além de ter sido historicamente a primeira a ser desenvolvida, ainda é, hoje em dia, a lógica mais difundida e mais usada — alguns autores até a consideram erroneamente como a Única Lógica Verdadeira. Ela serve de base para a matemática, por exemplo, e boa parte das lógicas não-clássicas (como algumas que veremos depois) são construídas como extensões dela.

O cerne da lógica clássica é o *cálculo de predicados de primeira ordem* (vamos chamá-lo de **CQC**, para abreviar), cujo estudo você vai iniciar neste capítulo. Essa lógica é também conhecida como *lógica de primeira ordem*, *lógica elementar* ou *teoria da quantificação* — daí o '**Q**' em '**CQC**' (que você pode ler como 'cálculo quantificacional clássico', se quiser). Existem várias formulações do cálculo de predicados, dependendo da linguagem empregada; vamos começar com a formulação mais simples (sem identidade, nem símbolos funcionais), e considerar, mais tarde, algumas de suas extensões.

É importante mencionar também aqui o *cálculo proposicional clássico*, o **CPC** (também chamado de *cálculo sentencial* ou *cálculo de enunciados*). Se o **CQC** é uma lógica de primeira ordem, podemos dizer que o **CPC** é uma lógica de ordem zero. Essa lógica, que tem suas origens na lógica dos filósofos estóicos, é um subsistema interessante do **CQC**. Por subsistema quero dizer, entre outras coisas, que a linguagem do **CPC** é uma parte pequena da linguagem do cálculo de predicados — em outras palavras, uma linguagem simplificada, mas que, mesmo assim, tem uma grande importância (como veremos mais tarde).

5.2 Introduzindo o CQC

Antes de apresentar a linguagem do **CQC** em detalhes, vamos falar um pouco, informalmente, a seu respeito, tomando como ponto de partida dois exemplos possíveis de aplicação.

Primeiro (e é o que viemos indicando até agora como aplicação da lógica), você pode se defrontar com um argumento, como o seguinte, e procurar saber de sua validade:

(A1) P_1 Cleo é um peixe.
P_2 Miau é um gato.
► Cleo é um peixe e Miau é um gato.

Esse é um argumento bastante simples — duas premissas e uma conclusão que, obviamente, se segue delas. O primeiro passo para analisar a validade do argumento seria, como foi dito acima, traduzir o que está em português para uma linguagem formal. Agora, que tipos de símbolos são necessários, nessa linguagem, para que possamos fazer uma tal tradução?

Considere a primeira premissa, isto é:

Cleo é um peixe.

Examinando sua estrutura — a já conhecida análise gramatical que você aprendeu na escola —, você nota que há um indivíduo, Cleo (o sujeito da sentença), que tem a propriedade de ser um peixe (o que corresponde ao predicado da sentença). Esse tipo de sentença é chamado de *sentença atômica*, ou *simples*, porque não pode ser decomposta em outras sentenças mais simples. A segunda premissa de (A1), 'Miau é um gato', também é uma sentença atômica. Compare essas duas, entretanto, com a conclusão, ou seja:

Cleo é um peixe e Miau é um gato.

Aqui já temos uma sentença complexa: ela é formada juntando-se as duas sentenças anteriores através da conjunção 'e'. A esse tipo de sentença — isto é, uma sentença que contém uma ou mais sentenças como partes — chamamos de *sentença molecular*, ou *complexa*. Para usar uma outra imagem, se você imaginar que sentenças atômicas são tijolos, as sentenças moleculares serão como paredes e muros, construídas a partir de outras sentenças usando-se certas expressões ('e', 'ou' etc.) como argamassa.

Assim, para formalizar adequadamente as sentenças[2] que ocorrem em (A1), temos que introduzir, inicialmente, três tipos de símbolos:

[2]Recorde que, de acordo com a simplificação que fizemos no capítulo 1, cada sentença estará, de um modo geral, representando uma única proposição; assim, podemos concentrar-nos diretamente nas sentenças.

símbolos que representem *indivíduos*, símbolos que representem *propriedades* e, naturalmente, símbolos para palavras especiais como 'e', bem como (o que já vimos em outros exemplos de argumento) para 'todo', 'algum' etc.

Uma segunda maneira de usar o **CQC**, além de ser para analisar a validade de um argumento dado, é quando estamos interessados em sistematizar o conhecimento que temos a respeito de algum domínio de estudo, bem como fazer inferências a respeito desse domínio, obtendo, então, conhecimento novo. Ou seja, quando estamos fazendo uma *teoria* a respeito de um domínio de estudo (num sentido bastante amplo de 'teoria'). Esse conhecimento consiste em proposições que falam dos *indivíduos* ou *objetos* que se supõe existirem, das *propriedades* que eles têm ou deixam de ter, e das *relações* em que estão, ou deixam de estar, entre si. (Poderíamos mesmo dizer que tais proposições são as "premissas" que podemos usar para obter novas conclusões a respeito dos elementos do domínio.)

Assim, ao usarmos o **CQC** com um tal objetivo, o primeiro ponto consiste em delimitar um universo de discurso, isto é, dizer de que objetos ou indivíduos se pretende falar. Depois, precisamos especificar que propriedades deles, e que relações entre eles, nos interessam estudar. Este processo pode ser chamado de fazer uma *conceitualização* (cf. Genesereth & Nilsson, 1984, p.9).

Para tornar isto mais claro, considere, por exemplo, o que acontece na figura 5.1. Temos aqui ao menos dois indivíduos, um gato — Miau, digamos — e um pássaro, Tweety. Podemos também considerar um indivíduo, se quisermos, o poleiro onde Tweety está, por exemplo, ou a cauda de Miau. Ainda que seja difícil dar uma definição, um *indivíduo*, ou *objeto*,[3] é aquilo que podemos destacar do restante, dando-lhe, por exemplo, um nome. Não é necessário que um objeto *tenha* um nome, mas basta que, em princípio, isso possa ser feito. E não vamos querer aqui ficar restritos apenas aos chamados *objetos físicos existentes*, como a Lua, o Taj Mahal, a Praça da República, o Aconcágua, ou Claudia Schiffer: nossa noção de objeto será bastante

[3]Estou considerando os termos 'indivíduo' e 'objeto' como totalmente sinônimos — não há nenhuma implicação de que indivíduos sejam pessoas, e objetos sejam coisas, por exemplo.

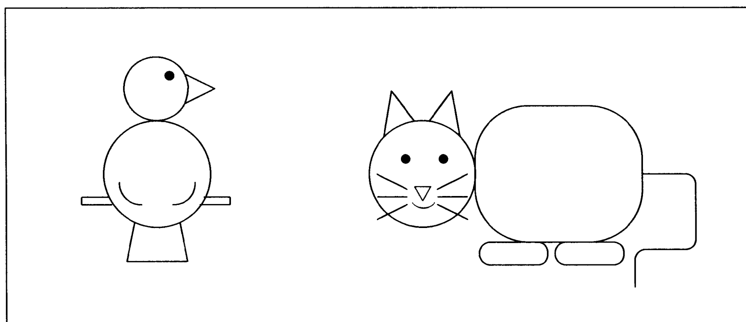


FIGURA 5.1 — Tweety e Miau.

ampla. Assim, além dos objetos físicos existentes como os acima citados, podemos ter também indivíduos abstratos, como os números 2, π, a raiz quadrada de 5, a beleza, a vermelhidão, a economia de mercado, a alma, e assim por diante. Podemos também incluir indivíduos que "não existem" — pessoas mortas, como Tutankhamon, ou ficcionais, como Sherlock Holmes, D. Quixote, o vampiro Lestat, Darth Vader e Lara Croft.

Os objetos podem ainda ser *simples* ou *compostos*. Um objeto simples é aquele que, dentro de um certo universo, não pode ser decomposto em partes que sejam objetos. Por exemplo, se nosso universo inclui apenas automóveis, esses objetos são simples: qualquer indivíduo desse universo é um automóvel; assim, não faz sentido falar dos faróis de um automóvel, pois faróis não são indivíduos neste universo. Por outro lado, se, além de automóveis, tivermos faróis, rodas, e tudo mais, um automóvel seria um objeto composto — e 'composto' quer dizer 'formado por outros objetos desse universo'. Uma pessoa pode ser vista como um conjunto de células, ou de átomos, ou pode ser vista como um objeto simples, "sem partes". É tudo uma questão de como se está conceitualizando um certo domínio. Note que, ao fazer isto, não precisamos colocar no universo *todos* os objetos existentes no mundo real: normalmente estamos interessados apenas em um domínio bem específico. Por exemplo, poderíamos estar interessados apenas nos números racionais, excluindo os gatos, as estrelas, as folhas das árvores, os números irracionais, e todo o resto. Ou po-

deríamos restringir o universo aos corpos celestes, deixando de lado os números e pessoas, e assim por diante.

Exercício 5.1 Você acha que seria possível incluir no universo de estudo objetos impossíveis, como o círculo quadrado, o número inteiro cujo quadrado é −1 e o único gato branco que não é gato? Estes são, é claro, objetos realmente curiosos. Pense a respeito.

Voltando ao exemplo da figura 5.1, digamos que, para simplificar, Miau e Tweety são os únicos indivíduos. Podemos agora dizer dos indivíduos representados que eles têm algumas propriedades: por exemplo, que Miau *é um gato*, que Miau *está sorrindo* (provavelmente com segundas intenções a respeito de Tweety), que Tweety *é um pássaro*, que *está no poleiro* e assim por diante. Como exemplos de relação, podemos dizer que Miau *está perto de* Tweety, ou que Miau *é maior que* Tweety.

(Fazendo um parêntese, note que '*x* está no poleiro' indica uma propriedade que Tweety tem — isso não implica que exista um indivíduo no universo que seja um poleiro. Claro, um modo alternativo de representar isso seria admitir o poleiro como indivíduo, e expressar o fato de que Tweety está no poleiro através da relação '*x* está em *y*', vigorando entre os indivíduos Tweety e poleiro.)

Proposições como estas acima, que expressam nosso conhecimento sobre o universo da figura 5.1, poderão ser formalizadas na linguagem do **CQC**. Para isto, claro, vamos precisar — como já nos demos conta ao examinar (A1) — de símbolos que possamos usar como nomes de indivíduos, e símbolos para propriedades e relações. E, mais uma vez, símbolos para certas palavras especiais, como 'todo': podemos querer dizer, por exemplo, a respeito do universo da figura 5.1, que nem todo indivíduo é um pássaro, ou que todo indivíduo tem dois olhos etc.

5.3 Algumas características da lógica clássica

Antes de passarmos à linguagem do **CQC**, existem ainda outros detalhes preliminares que é preciso mencionar. No início deste capítulo, eu dizia que o **CQC** faz parte da lógica clássica. Bem, o fundador

da lógica clássica, Gottlob Frege, estava originalmente preocupado com o uso da lógica na fundamentação da matemática — basicamente, buscando tornar mais precisa a noção de *prova* ou *demonstração* matemática. Ora, proposições matemáticas são normalmente entendidas como verdadeiras independentemente do tempo e lugar, do falante etc., ou seja, livres de qualquer contexto. Dito de outra forma, uma sentença matemática expressa uma e somente uma proposição — ao contrário, como vimos, de sentenças como 'Eu estou com fome', que podem ser usadas por diferentes pessoas em diferentes ocasiões para expressar diferentes proposições.

Assim, dado esse caráter particular das proposições matemáticas, temos a razão pela qual se fez, na lógica clássica, a simplificação de que falamos anteriormente: trabalhar com sentenças diretamente, em vez de proposições. Essa decisão, como vimos, poupa trabalho, pois nos libera de fazer uma teoria das proposições e nos permite ficar no nível das sentenças, objetos que, por exemplo, têm uma estrutura facilmente reconhecível.

Note que essa decisão deixa de fora aspectos (como o tempo) que podem ser importantes em outras aplicações que não na matemática. O universo da figura 5.1 é um universo estático: não há um momento posterior àquele representado, em que Miau esteja mais perto de Tweety, ou em que Tweety tenha voado embora. Se você quiser, um tal universo é um recorte do universo real, restrito a um pequeno lugar e a um certo instante — como uma fotografia.

Dessa maneira, para utilizar o CQC para formalizar conhecimento e fazer inferências sobre um domínio de estudo, um universo, um assunto, ou mesmo para formalizar um argumento (i.e, traduzi-lo para uma linguagem artificial da lógica), precisamos primeiro fazer uma "modelagem matemática" deste: coisas como tempo, imprecisões, ambigüidades são todas eliminadas. Podemos então usar a lógica clássica para raciocinar sobre esse modelo resultante.

Note que isso não é uma decisão tão drástica e arbitrária quanto parece: várias outras ciências fazem a mesma coisa. Na matemática, falamos de entidades como pontos sem dimensão, linhas sem largura; na mecânica temos superfícies sem atrito, e assim por diante. Modelos são sempre aproximações ou idealizações da realidade, e mesmo assim (ou talvez justamente por isto) extremamente úteis.

CAPÍTULO 6

A SINTAXE DO CÁLCULO DE PREDICADOS (I)

Este capítulo tem por objetivo apresentar a linguagem artificial utilizada pelo *cálculo de predicados de primeira ordem*. Vamos primeiramente introduzi-la de modo mais informal, tratando-a com mais rigor no próximo capítulo.

6.1 Símbolos individuais

Como você recorda, para caracterizar uma linguagem formal necessitamos, primeiro, especificar seu *alfabeto*, ou conjunto de símbolos básicos; depois, especificar ainda uma *gramática* para definir que expressões (ou seja, seqüências finitas de símbolos da linguagem) são bem-formadas. Recorde que uma expressão de uma linguagem é *qualquer* seqüência finita de símbolos dessa linguagem, mas nem todas elas são bem-formadas. (Assim, '<+2×' e '2 < 5' são expressões de uma linguagem da aritmética, mas apenas a segunda é bem-formada.)

O alfabeto do **CQC** é o seguinte conjunto de 65 caracteres:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
n	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T						
$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\forall$	$\exists$	(	)				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			

A partir deste alfabeto, deste conjunto de caracteres, é que vamos construir as expressões da linguagem — começando pelas expressões básicas.

O primeiro grupo de expressões básicas da linguagem do **CQC** são as chamadas *constantes individuais*, que têm a função de designar indivíduos. Usaremos as letras minúsculas $a, \ldots, t$ como constantes individuais, admitindo também o uso de subscritos: por exemplo, a_1, q_{22} etc. (Subscritos serão numerais arábicos para os números naturais positivos.) A possibilidade do uso de subscritos nos garante que vamos ter um conjunto infinito, enumerável, de constantes individuais. Vamos apresentá-las segundo uma ordem canônica, que é a seguinte:

$$a, b, c, \ldots, t, a_1, b_1, \ldots, t_1, a_2, \ldots$$

Seguindo esta ordem, a é a primeira constante, b é a segunda, e assim por diante. Note que há uma diferença entre um caractere da linguagem (um elemento do alfabeto, que é um conjunto finito de caracteres) e uma expressão básica como uma constante individual, de que temos um número infinito. Uma expressão básica, ainda que básica, já é construída a partir dos caracteres do alfabeto. (É a mesma diferença que você encontra, no português, entre a letra 'o' e a palavra — o artigo definido — 'o'.)

Vamos relembrar o argumento (A1), apresentado no início do capítulo anterior:

(A1) P_1 Cleo é um peixe.
P_2 Miau é um gato.
▶ Cleo é um peixe e Miau é um gato.

Poderíamos usar a letra c para simbolizar 'Cleo', e a primeira premissa do argumento, meio traduzida para a linguagem do **CQC**, ficaria assim:

c é um peixe.

Constantes individuais funcionam como *nomes*. Isso, contudo, não se restringe apenas aos *nomes próprios* em português (como 'João', 'Maria', 'Cleo' etc.), mas pode incluir também o que chamamos de *descrições definidas*. Por exemplo, a expressão 'o autor de *D. Quixote*',

embora não seja um nome próprio, designa univocamente um indivíduo — bem como a expressão 'o navegador português que descobriu o Brasil'. Assim, uma frase como

O autor de *D. Quixote* é espanhol

seria traduzida, para começar, por

a é espanhol,

em que usamos a para 'o autor de *D. Quixote*'. (Veremos, mais tarde, que descrições definidas também podem ser analisadas e representadas de outras maneiras, mas, por enquanto, vamos fazer uso de constantes individuais para isso.)

É importante notar, uma vez que constantes individuais funcionam como nomes, que você não pode usar a mesma constante para dois indivíduos diferentes. Por exemplo, se você estiver formalizando um argumento envolvendo João e José, não é permitido usar a letra j para indicar a ambos. Mas você pode, claro, usar j_1 e j_2. Por outro lado, é possível (e permitido) que um indivíduo tenha vários nomes — correspondendo às diferentes descrições que podemos ter de uma mesma pessoa, como 'Machado de Assis', 'o autor de *Dom Casmurro*' etc. Dessa forma, podemos usar várias constantes para fazer referência a um mesmo indivíduo.

O segundo grupo de expressões básicas da linguagem que vamos ver agora são as *variáveis individuais*. Usaremos as letras minúsculas $u,\ldots,z$, com ou sem subscritos, para as variáveis. Da mesma forma que as constantes, temos um conjunto enumerável de variáveis, e uma ordem canônica, a saber:

$$u, v, w, x, y, z, u_1, v_1, \ldots, z_1, u_2, \ldots$$

As variáveis individuais funcionam, gramaticalmente, como as constantes, isto é, como nomes. Porém, obviamente, elas não são nomes de indivíduos específicos, mas têm associado a si um domínio de variação. Como vimos no capítulo 3, precisamos especificar quais são os substituendos e quais são os valores das variáveis. Os substituendos — as coisas pelas quais podemos substituir uma ocorrência de variável em uma expressão da linguagem — serão (por enquanto) as

constantes individuais da linguagem, e os valores, todos os indivíduos do universo que estivermos investigando. Assim, se nosso universo for um conjunto de peixinhos dourados, o valor que uma variável como, digamos, x pode tomar será algum desses peixinhos.

Da mesma forma em que escrevemos 'c é um peixe' para indicar que o indivíduo (determinado) cujo nome é c é um peixe, podemos também escrever, usando uma variável,

x é um peixe,

que afirma, de algum indivíduo não especificado ainda, que ele é um peixe.

Se você quiser um análogo em português de variáveis, compare a sentença

Cleo é um peixe. (1)

com a seguinte, tomada fora de qualquer contexto:

ela é linda.

Enquanto 'Cleo' (supostamente) se refere univocamente a um indivíduo, que dizer de um pronome como 'ela'? Podemos considerar um pronome (aliás, é de onde vem essa denominação) como "marcador" do lugar de um nome. No caso, a palavra 'ela' não se refere a um indivíduo específico, da mesma forma que

x é um número

não se refere a um número específico. Enquanto (1) expressa uma proposição, e é, então, verdadeira ou falsa, 'x é um número' não pode ser dita simplesmente verdadeira ou falsa; isso depende do valor que x tomar num determinado contexto. Da mesma maneira, só podemos dizer se a sentença 'ela é linda' é verdadeira ou falsa se soubermos a quem o pronome 'ela' se refere.

As constantes individuais e variáveis individuais da linguagem do **CQC** são denominadas *termos* dessa linguagem. Constantes e variáveis são também comumente chamadas de *símbolos individuais*, mas, por favor, não confunda esse uso de 'símbolo' com o de 'símbolos da linguagem' — isto é, os caracteres da linguagem. Mais uma vez,

temos um conjunto finito de caracteres da linguagem do **CQC** (o alfabeto), e um conjunto infinito de, por exemplo, constantes. Constantes já não são parte do alfabeto da linguagem, mas são *expressões* formadas a partir deste; elas envolvem ao menos uma letra minúscula, e eventualmente um subscrito.

Exercício 6.1 Diga, de cada uma das expressões abaixo, se ela é ou não uma expressão da linguagem do **CQC**. Caso seja, diga também se ela é uma constante, ou uma variável:

(a)	a	(e)	e'	(i)	w_{725}
(b)	z_2	(f)	p_0	(j)	pq
(c)	x_{VI}	(g)	9	(k)	q_{-1}
(d)	t_{47}	(h)	$-a$	(l)	k

6.2 Constantes de predicado e fórmulas atômicas

Nosso próximo passo será introduzir símbolos para *propriedades* e *relações*. Como vimos, ser um pássaro é uma propriedade que Tweety tem, e é necessário também poder representá-la na linguagem. Mas precisamos primeiro conversar um pouco sobre o que são propriedades.

Como você recorda, uma suposição básica que estamos fazendo é a de que os indivíduos de que falamos têm propriedades e estão em certas relações com outros indivíduos. Até agora, estivemos falando informalmente sobre propriedades e relações — por exemplo, ao falarmos de conjuntos — e talvez fosse esta a ocasião para precisar um pouco mais o que são essas coisas. Porém, não pretendo entrar aqui em questões metafísicas sobre a existência (ou não) de propriedades no mundo; vou simplesmente supor que existam. Para nós, o importante é que uma propriedade — também chamada de *predicado de grau* 1, ou *predicado de* 1 *lugar*, ou ainda *predicado unário* —, seja lá o que for, possa ser especificada como se segue:

x é um gato,

x é um filósofo.

Ou seja, por meio de uma expressão do português, na qual aparecem variáveis — no caso acima, x — tais que, se as substituirmos pelo nome de algum indivíduo, o resultado é uma sentença declarativa. As variáveis têm aqui a função de "marcadores de lugar", isto é, indicam as posições, dentro da expressão lingüística, onde podem ser colocados nomes para formar uma sentença declarativa. (Para simplificar, usaremos as variáveis do **CQC** como marcadores de lugar ao especificar predicados, mas não deve haver confusão sobre essas suas duas funções.) Expressões do português (ou de qualquer língua) que contêm variáveis, e que podem ser transformadas em sentenças declarativas pela substituição das variáveis por nomes, são usualmente chamadas de *formas sentenciais* ou *funções proposicionais*.

Ter propriedades nos leva, então, a nosso terceiro grupo de expressões básicas, as *constantes de predicado* (também denominadas '*símbolos* de predicado'). Para elas, usaremos letras maiúsculas A,...,T; naturalmente podendo admitir subscritos, como A_1, R_{44} etc. A ordem canônica é a seguinte:

$$A, B, C, \ldots, T, A_1, B_1, \ldots, T_1, A_2, \ldots$$

Assim, se usarmos a letra P para representar a propriedade 'x é um peixe', a primeira premissa de (A1), 'Cleo é um peixe', seria formalizada da seguinte maneira (onde c é Cleo, lembra?):

$$Pc.$$

Note que o símbolo de predicado é escrito *antes* da constante individual. Nada nos impede de fazer o contrário, desde que usemos a notação de modo homogêneo. O usual, contudo, é colocar a constante de predicado primeiro, e é o que faremos aqui. De maneira similar, se utilizarmos G para simbolizar 'x é um gato', e m para 'Miau', teríamos a segunda premissa do argumento assim:

$$Gm.$$

Expressões como Pc e Gm acima são chamadas de *fórmulas*. Na verdade, são as fórmulas mais simples que temos e, por corresponderem a sentenças atômicas, vamos chamá-las de *fórmulas atômicas*. Nos dois casos exemplificados, uma fórmula atômica foi obtida aplicando-se um símbolo de propriedade a uma constante indivi-

dual. Podemos obter também fórmulas atômicas com variáveis — por exemplo, Px, o que corresponde à forma sentencial 'x é um peixe'. (Isto nos será útil logo mais adiante.)

Lembre-se de que uma das características do **CQC** é que, ao traduzir uma sentença para a sua linguagem, abstraímos o tempo verbal. Por exemplo, se tivermos o símbolo F representando a propriedade 'x é um filósofo', e s representando Sócrates, a sentença 'Sócrates *foi* um filósofo' seria escrita da seguinte maneira:

$$Fs,$$

o que, se "retraduzido" para o português, significaria que Sócrates *é* um filósofo. Resumindo: antes de formalizar sentenças no **CQC**, precisamos passar todos os tempos verbais para o presente.

Antes de nos ocuparmos da conclusão de (A1), vamos falar um pouco mais sobre as constantes de predicado. Como você vê, se elas são chamadas 'constantes de *predicado*', em vez de 'constantes de propriedade', é porque deve haver mais a ser dito a este respeito. De fato, existem predicados que *não são* propriedades. Considere a sentença abaixo:

João é mais alto que Maria. (2)

Enquanto, com 'Tweety é um pássaro', dizíamos que o indivíduo cujo nome é 'Tweety' tem a propriedade de ser um pássaro, aqui precisamos usar uma outra terminologia. O que dizemos é que João e Maria se encontram numa certa *relação*. Não podemos dizer que um deles, individualmente, tenha a propriedade de ser mais alto que — ficaria esquisito afirmar 'João é mais alto que'. Poderíamos, é claro, dizer que João tem a propriedade 'x é mais alto que Maria', mas isso esconde a existência do indivíduo Maria. Além do mais, suponhamos que você tivesse que formalizar também a sentença

João é mais alto que Carlos.

Se você fosse formalizá-la também com símbolos de propriedade, você teria que ter um *novo* símbolo para a propriedade 'x é mais alto que Carlos' — que é uma propriedade diferente de 'x é mais alto que Maria'.

Assim, o mais natural é usar um segundo tipo de símbolo de predicado: símbolos para relações entre *dois* indivíduos: as relações binárias, ou *predicados de grau* 2 — também chamados de *predicados de* 2 *lugares*, ou *binários*. Com respeito à sentença (2), poderíamos representá-la da seguinte maneira, utilizando o símbolo H para representar a relação 'x é mais alto que y', e j e m para denotar, respectivamente, João e Maria:

$$Hjm.$$

Temos, então, um segundo tipo de fórmula atômica, que consiste em tomar uma constante de predicado binário (de relação binária, portanto) e acrescentar-lhe dois símbolos individuais (constantes ou variáveis). Note que, tendo agora dois termos escritos após a constante de predicado, temos que cuidar da *ordem* em que eles aparecem. As fórmulas Hjm e Hmj dizem coisas diferentes: a primeira, que João é mais alto que Maria; a segunda, que Maria é mais alta que João. (Obviamente, se uma delas for verdadeira, a outra será falsa.) As variáveis que estamos usando como marcadores de lugar indicam também a ordem em que os termos devem ser colocados depois da constante de predicado, o que é possível, já que elas foram introduzidas em uma ordem padrão (ou canônica). Ou seja, como x precede y na ordem canônica, o x que ocorre em 'x é mais alto que y' diz que o *primeiro* símbolo individual depois da constante de predicado — j, em Hjm — se refere ao indivíduo, João, que é mais alto que o outro indivíduo, Maria.

Resumindo, temos um tipo de constante de predicado que é um símbolo de propriedade: propriedades aplicam-se a indivíduos isoladamente. E temos símbolos de relações entre dois indivíduos. Mas será que não poderia haver uma relação entre *três* indivíduos? Claro. Um exemplo seria:

João está sentado entre Maria e Cláudia. (3)

Neste caso, poderíamos introduzir a constante de predicado E para denotar a relação ternária 'x está sentado entre y e z', o que nos daria, supondo que j, m e c denotem os indivíduos em questão:

$$Ejmc.$$

Ainda a respeito desse exemplo, gostaria de mencionar que as variáveis que indicam os lugares a preencher não precisam aparecer necessariamente na ordem padrão quando especificamos um predicado. A sentença (3) pode ser também adequadamente formalizada usando-se um símbolo S que represente a relação 'y está sentado entre x e z'. O resultado seria

$$Smjc,$$

que tem a vantagem visual de colocar j entre m e c. Isso acontece porque y vem depois de x na ordem canônica; assim, como temos as variáveis x, y e z, x marca o primeiro lugar depois da constante de predicado, y o segundo, e z o terceiro. Enfim, há várias maneiras de especificar um predicado, e o importante é que, uma vez fixado um símbolo e o que ele representa, você o use de modo coerente.

Note também que o número de lugares de um predicado será indicado pelo número de marcadores de lugar diferentes. Assim, se tivermos o seguinte predicado:

x bateu o carro de y, que ficou irritado e deu uma surra em x,

fica fácil ver que este é um predicado de grau *dois* (ainda que x ocorra duas vezes, temos apenas dois indivíduos envolvidos).

Como você viu, constantes de predicados podem representar relações envolvendo n indivíduos, para algum n. No geral, dizemos que temos: símbolos de predicados *unários* (propriedades), *binários* (relações entre dois indivíduos), *ternários* (relações entre três indivíduos), . . . , *n-ários* ou *enários* (relações entre n indivíduos, para algum número natural n). Todos eles são chamados de constantes (ou símbolos) de predicado. Se desejarmos — e alguns autores fazem isso —, podemos convencionar que os símbolos de predicados são constituídos de uma letra maiúscula seguida de um índice superior, como A^1, F^2, R^3 etc., indicando o seu *grau*. Isto é, indicando que se trata, respectivamente, de predicados unários, binários, ternários etc. Não usaremos essa convenção aqui, esperando ficar sempre claro, pelo contexto, a quantos indivíduos nossos símbolos de predicado se aplicam.

Resta ainda um caso a considerar: se temos símbolos de predicados n-ários, para qualquer número natural n, isso significa que n pode ser

igual a zero? Pode. Um predicado *zero-ário* nada mais é do que uma letra maiúscula isolada, que usamos principalmente para representar sentenças como

Está chovendo,

que, na verdade, são orações sem sujeito, isto é, não atribuem algo a alguém.

Constantes de predicado zero-árias são também chamadas de *letras sentenciais*. Contudo, há outros usos para elas, além de simbolizar orações sem sujeito. Em princípio, você pode usar uma letra sentencial para formalizar *qualquer* sentença. Por exemplo, seria correto usar A para formalizar a sentença 'Sócrates é um filósofo' — assim como, em princípio, nada impede que formalizemos 'João é mais alto que Maria' usando um símbolo para a propriedade '*x* é mais alto que Maria'. Ninguém é obrigado a formalizar 'Sócrates é um filósofo' como *Fs*, ou 'João é mais alto que Maria' como *Hjm*. Por exemplo, se quiséssemos formalizar essa última sentença no **CPC** (que é, como falei, um subsistema do **CQC**), iríamos fazê-lo usando apenas uma letra sentencial. (A linguagem do **CPC**, como você terá ocasião de ver depois, é mais fraca.) Acontece apenas que muitos argumentos que seriam intuitivamente válidos podem acabar sendo considerados inválidos se a tradução para a linguagem formal não for detalhada o suficiente.

Voltaremos mais tarde a falar disso. Agora, antes de encerrar esta seção, vamos caracterizar de modo preciso o que são as fórmulas atômicas da linguagem do **CQC**. Para recordar, o primeiro passo ao se definir a linguagem de uma teoria lógica é especificar o conjunto de símbolos que serão utilizados — é o que fizemos até aqui (mas não terminamos ainda). O segundo passo, como foi mencionado no início deste capítulo, é dizer, a respeito das expressões formadas por esses símbolos, quais são *bem-formadas*, e quais não são. Por exemplo, tanto 'gato' como 'existem gatos pretos' como 'xrtga' são expressões do português. Entretanto, somente as duas primeiras são ditas "bem-formadas" — ou seja, correspondem, respectivamente, a uma *palavra* e a uma *sentença* do português. A terceira, 'xrtga', não é nem palavra nem sentença.

Contudo, critérios para decidir se algo é uma palavra, ou uma sentença, em uma linguagem natural, às vezes podem ser imprecisos. Isso ocorre porque as línguas evoluem, e demora sempre um pouco até que, digamos, uma nova expressão ache o caminho do dicionário. Em uma linguagem artificial, por outro lado, o objetivo é eliminar qualquer inexatidão; logo, a caracterização de uma expressão bem-formada é feita por meio de uma definição rigorosa. A linguagem do **CQC** que vimos até agora está longe de ser completa, mas vamos fazer uma pausa aqui e começar a definir o que são suas expressões bem-formadas.

O primeiro grupo de expressões bem-formadas, claro, nós já vimos: são os *termos*, isto é, as constantes e variáveis individuais. O segundo grupo, que começaremos a definir agora, são as chamadas *fórmulas bem-formadas*, ou, simplesmente, *fórmulas*.

A definição de fórmula que teremos aqui é *indutiva*. Isso consiste em apresentar elementos iniciais do conjunto a ser definido, e depois listar regras que permitem obter novos elementos a partir daqueles já existentes. No caso de nossa definição de fórmula, começarei apresentando a base de tudo, as fórmulas atômicas. Mais tarde, vou mostrar como fórmulas complexas podem ser construídas a partir delas.

As fórmulas atômicas são definidas por meio da seguinte cláusula:

(1) Se $\mathbf{P}$ é um símbolo de predicado n-ário, para algum número natural n, e $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ são termos, então $\mathbf{P}\mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ é uma fórmula.

Vejamos alguns comentários sobre isso. Primeiro, note que o símbolo '**P**' (que está em **negrito**) não faz parte da linguagem do **CQC**: é uma *variável metalingüística* (ou *variável sintática*) que representa uma constante de predicado qualquer — que pode ser *A*, *B*, *C* etc. (Note que as letras que fazem parte do alfabeto do **CQC** estão sendo escritas em *itálico*.) Do mesmo modo, '$\mathbf{t}_1$',...,'$\mathbf{t}_n$' também são metavariáveis que indicam termos (constantes ou variáveis individuais) quaisquer. A cláusula acima, como foi dito, define as fórmulas atômicas: elas consistem em um símbolo de predicado n-ário seguido de n termos — notando-se que n pode ser zero, claro. Assim, se o símbolo de predicado é, por exemplo, ternário, deve ser seguido de *exatamente* três termos, nem mais, nem menos. Se for zero-ário, zero termos (ou seja, nenhum). Se for unário, um termo. E assim por diante.

Resta-nos considerar o caso da conclusão do argumento (A1), que afirma que Cleo é um peixe e Miau é um gato. Este é um caso mais complicado, e vamos tratá-lo na próxima seção, depois de alguns exercícios.

Exercício 6.2 Usando a notação sugerida, traduza as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**.
c: Cleo; *m*: Miau; *t*: Tweety; *F*: *x* é um peixe; *P*: *x* é um pássaro; G: *x* é um gato; M: *x* é maior do que *y*; *L*: *x* gosta mais de *y* do que de *z*.

(a) Cleo é um pássaro.
(b) Miau é um peixe.
(c) Miau é maior que Cleo.
(d) Tweety é um gato.
(e) Tweety é maior que Miau.
(f) Miau é maior que Tweety.
(g) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety.
(h) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo.
(i) Cleo gosta mais de si mesma do que de Miau.

Exercício 6.3 Traduza as seguintes sentenças para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:

(a) Carla é pintora. (*c*: Carla; *P*: *x* é pintora)
(b) Paulo é jogador de futebol. (*p*: Paulo; *J*: *x* é jogador de futebol)
(c) Carla é mais alta que Paulo. (*A*: *x* é mais alto que *y*)
(d) Paulo é irmão de Carla. (*I*: *x* é irmão de *y*)
(e) Paulo ama Denise. (*d*: Denise; *A*: *x* ama *y*)
(f) Denise ama Paulo.
(g) Carla gosta de si própria. (G: *x* gosta de *y*)
(h) A Lua é um satélite da Terra. (*l*: a Lua; *t*: a Terra; *S*: *x* é um satélite de *y*)
(i) Carla deu a Paulo o livro de Denise. (*D*: *x* dá a *y* o livro de *z*)
(j) Paulo deu a Carla o livro de Denise.
(k) Paulo é filho de Alberto e Beatriz. (*a*: Alberto; *b*: Beatriz; *F*: *x* é filho de *y* e *z*)
(l) Florianópolis fica entre Porto Alegre e Curitiba. (*f*: Florianópolis; *p*: Porto Alegre; *c*: Curitiba; *E*: *x* fica entre *y* e *z*)
(m) Curitiba fica entre Florianópolis e São Paulo. (*s*: São Paulo)

(n) Paulo comprou em Curitiba um quadro de Matisse para presentear Denise. (m: Matisse; C: x comprou em y um quadro de z para presentear w)

(o) Alberto comprou em São Paulo um quadro de van Gogh para presentear Beatriz. (g: van Gogh)

6.3 Operadores e fórmulas moleculares

Voltemos agora a considerar a conclusão do argumento (A1) anteriormente apresentado, a saber, 'Cleo é um peixe e Miau é um gato'. Como vimos, essa é uma sentença molecular ou complexa, e contém as duas premissas do argumento como partes. Um outro exemplo de sentença molecular é:

João é músico ou João é pintor.

Aqui a expressão que faz a composição das sentenças 'João é músico' e 'João é pintor' é a conjunção 'ou'. A esse tipo de expressão do português, que forma sentenças a partir de sentenças mais simples, damos o nome de *operador lógico* ou *conectivo*. Como exemplos de operadores, temos os seguintes (as reticências indicam o lugar a ser ocupado por uma sentença):

- não é verdade que ...
- se ... então ...
- nem ... nem ...
- ou ... ou ...
- ... e ...
- é impossível que ...
- Darth Vader acredita que ...
- será o caso que ...

Existe um número muito grande de operadores nas linguagens naturais: a lista acima é apenas uma pequena amostra. Contudo, nem todos eles vão ser de interesse para o **CQC**. Entre aqueles que são formalizados no **CQC**, temos o operador de *negação*, em português geralmente indicado pela expressão 'não'. Dada uma sentença como 'Cleo é um peixe', podemos formar sua negação, dizendo

Cleo *não* é um peixe. (4)

Outras maneiras de indicar a negação são possíveis por meio do uso de expressões como 'não é verdade que', 'é falso que', ou por certos prefixos, como 'in-', 'a-' etc. Por exemplo, se dizemos algo como

'Sua afirmação é incorreta', estamos, de fato, dizendo 'Sua afirmação não é correta'. Nem sempre, contudo, há uma equivalência entre as duas versões. Se dissermos, por um lado, 'Sócrates não é feliz' e, por outro, 'Sócrates é infeliz', queremos dizer exatamente a mesma coisa com as duas sentenças? Há quem defenda que não ser feliz não implica necessariamente ser infeliz — haveria um meio termo, neutro, entre felicidade e infelicidade. Portanto, você deve tomar um certo cuidado ao formalizar prefixos negativos usando o operador de negação, pois uma formalização deve procurar, obviamente, ser o mais fiel possível ao texto original. Dito de outra forma, com a formalização pretendemos fazer uma tradução do português para a linguagem artificial do **CQC** — e, claro, gostaríamos portanto de preservar ao máximo o significado da expressão original.

Para representar o operador de negação vamos utilizar o símbolo $\neg$. Assim, a sentença (4) acima poderia ser formalizada no **CQC** da seguinte maneira (lembrando que c representa Cleo, e P a propriedade 'x é um peixe'):

$$\neg Pc.$$

Note que o símbolo de negação apareceu *antes* da sentença negada, enquanto, na versão em português, ele ocorre "dentro" dela, por assim dizer. Se quiser, você pode ler $\neg Pc$ como 'Não é verdade que Cleo é um peixe'.

Uma fórmula como $\neg Pc$ é chamada de fórmula *molecular*. É fácil ver que ela não é atômica: ela contém outra fórmula — a saber, Pc — como uma parte própria. Esse tipo de construção pode ser repetido. Por exemplo, se quisermos agora fazer a negação da fórmula $\neg Pc$, basta colocar $\neg$ na frente dela: $\neg\neg Pc$.

Note que $\neg\neg Pc$ e Pc são fórmulas *diferentes*. É claro que elas parecem ser a mesma coisa; afinal, negar duas vezes não é o mesmo que afirmar? Afirmar '*não é verdade que* a Terra *não* é redonda' não é o mesmo que afirmar 'a Terra é redonda'? Em certo sentido, claro que sim, mas note que são duas sentenças distintas em português (uma começa com 'não', a outra com 'a'). Do mesmo modo, as fórmulas são distintas: Uma começa com '$\neg$'; a outra, com 'P'.

O operador de negação tem uma característica interessante: configura o que chamamos de uma *função de verdade*. No caso da ne-

gação, isso quer dizer que podemos determinar se uma sentença negativa, como $\neg Pc$, é verdadeira ou falsa se soubermos se a sentença Pc, que está sendo negada, é verdadeira ou falsa. Por exemplo, se é verdade que Cleo é um peixe, então a sentença 'Cleo não é um peixe' será falsa. Por outro lado, se é falso que Cleo é um peixe, então a sentença 'Cleo não é um peixe' será verdadeira. Assim, a negação é uma função de verdade, como os outros operadores que vão nos interessar no **CQC**. Nem todo operador, contudo, tem essa característica: os últimos três operadores na lista apresentada anteriormente não são funções de verdade. Tome um operador como 'João acredita que ...'. O fato de uma proposição ser verdadeira não acarreta que João acredite nela — e João bem pode acreditar em proposições falsas. (Falaremos mais sobre funções de verdade, caracterizando-as com mais precisão, num dos próximos capítulos.)

O operador de negação é o que se chama de um operador *unário*, pois é aplicado a *uma* sentença apenas, para gerar uma sentença nova. Os demais operadores que vamos considerar são *binários*, ou seja, aplicam-se a *duas* sentenças para formar uma terceira. Vamos começar pelo 'e' mencionado acima, que tem o nome de *conjunção*. A conjunção é expressa em português por locuções como 'e', 'mas', 'todavia' etc. Claro que 'e' e 'mas' não têm exatamente o mesmo sentido em português, mas ambas as expressões têm em comum a característica de ligar duas sentenças, afirmando ambas. Se dizemos 'Pedro é inteligente e preguiçoso', ou 'Pedro é inteligente, mas preguiçoso', em ambos os casos estamos afirmando duas coisas de Pedro: que é inteligente *e também* que é preguiçoso. Ou seja, em ambos os casos, temos uma conjunção. Como você vê, a linguagem do **CQC** faz uma certa idealização com respeito à linguagem natural — as nuances de sentido diferenciando 'mas' e 'e' ficam, infelizmente, perdidas.

O símbolo que usaremos para a conjunção será $\wedge$. Podemos, enfim, escrever a conclusão do argumento (A1) na linguagem do **CQC** da seguinte maneira:

$$(Pc \wedge Gm).$$

Cada um dos elementos de uma conjunção chama-se um *conjuntivo*, ou *conjunto*. (Nota: não confundir com os conjuntos da teoria de conjuntos — e nem a palavra 'conjunção' com as conjunções da

gramática!) Você deve ter notado que a fórmula acima inclui parênteses: estes serão nossos sinais de pontuação, e falaremos logo a seguir a respeito da razão de seu uso. Mas vamos ver, antes, quais são os demais operadores.

Um outro operador que aparece no **CQC** é o de *disjunção*, que corresponde a 'ou' em português. O símbolo que vamos utilizar é $\vee$. Assim, a frase 'João gosta de Maria ou Maria gosta de João' poderia ser simbolizada da seguinte forma:

$$(Gjm \vee Gmj),$$

em que G simboliza '*x* gosta de *y*', e *j* e *m*, obviamente, denotam João e Maria. Outras locuções em português usadas para indicar disjunção são 'ou ... ou ...', 'ora ... ora ...', e até mesmo '... e/ou ...'. Os elementos de uma disjunção são chamados de *disjuntivos*, ou *disjuntos*.

Talvez você estranhe o fato de incluirmos a expressão 'e/ou' entre os modos de expressar uma disjunção em português. É que há um sentido da disjunção, em português, que admite que ambas as alternativas se verifiquem. Quando dizemos, por exemplo, 'chove ou faz sol', admitimos que possa acontecer as duas coisas. Isto é, uma sentença disjuntiva será verdadeira quando pelo menos uma das alternativas o for, e, se as duas são verdadeiras, é óbvio que pelo menos uma o é. Mas falaremos disto mais tarde, e com mais detalhes, quando estudarmos a semântica para o **CQC**.

O próximo operador é conhecido como *implicação* (*material*), e pretende-se que corresponda ao 'se ... então ...' em português. Uma sentença do tipo 'se ... então ...' é também chamada de *sentença condicional*, ou, simplesmente, de um *condicional*. (Como veremos mais tarde, o nome 'implicação' para esse operador não é nada apropriado.) O símbolo que utilizaremos para a implicação é $\rightarrow$. Desta forma, se usarmos a letra sentencial *N* para indicar 'Neva', e *F* para 'Faz muito frio', a sentença 'Se neva, então faz muito frio' seria formalizada assim:

$$(N \rightarrow F).$$

Dado um condicional, chamamos de *antecedente* à sentença que ocorre à esquerda de $\rightarrow$, ou seja, aquela que está com a partícula 'se': 'neva', no exemplo acima. À sentença que ocorre à direita de

$\to$, ou seja, vinculada à partícula 'então', chamamos de *conseqüente*: 'faz muito frio', no exemplo acima. Nem sempre, contudo, o antecedente é dito primeiro em português: uma versão costumeira da sentença anterior seria 'Faz muito frio, se neva', em que temos primeiro o conseqüente e só depois o antecedente. Outras maneiras em português que indicam o condicional 'Se neva, então faz muito frio' seriam (usando N e F como acima):

se N, F,
N somente se F,
F, se N,
N é condição suficiente para F,
F é condição necessária para N.

Vamos falar um pouco sobre isto. Intuitivamente, temos um condicional verdadeiro quando, se o antecedente for verdadeiro, o conseqüente também o é. Ou seja, não acontece que o antecedente seja verdadeiro e o conseqüente falso. Note que não estamos pretendendo que haja uma conexão *causal* ou *temporal* entre o antecedente e o conseqüente — recorde que, no **CQC**, fazemos abstração de considerações temporais. Não pretendemos dizer, com 'se neva, então faz muito frio', que o fato de estar nevando seja uma causa do fazer frio. O que queremos dizer é que, se é verdade que neva, isto é suficiente para que possamos afirmar que faz muito frio. Por outro lado, dissemos que fazer muito frio é uma condição necessária para que esteja nevando. Mais uma vez, isso não significa que primeiro esteja fazendo muito frio para depois nevar; queremos dizer apenas que não acontece que esteja nevando, mas que não esteja muito frio. Este é o sentido: você não pode ter neve sem ter muito frio. As mesmas observações se aplicam a 'neva somente se faz muito frio'.

O último operador que nos falta considerar é a *bi-implicação*. Uma proposição em que aparece uma bi-implicação é chamada *bicondicional*. Como o nome já sugere, é um condicional nas duas direções, correspondendo às expressões '... se e somente se ...' e '... é equivalente a ...'. O símbolo que usamos é $\leftrightarrow$. Portanto, $(N \leftrightarrow F)$ formaliza a sentença 'Neva se e somente se faz muito frio'.

A razão de 'N se e somente se F' ser um bicondicional é que, se olharmos bem, há dois condicionais envolvidos. Isto corresponde a:

[N, se F] e [N somente se F].

Ora, 'N, se F' é a mesma coisa que 'se F, então N'. Igualmente, 'N somente se F' é o mesmo que 'se N, então F'. Portanto, 'N se e somente se F' equivale a

[se F, então N] e [se N, então F],

o que caracteriza uma implicação nas duas direções: uma bi-implicação.

Concluindo esta seção, além das constantes individuais e de predicado, temos na linguagem do **CQC** os cinco símbolos de operadores, com os quais formamos as fórmulas moleculares: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$. Além disso, temos os parênteses, que funcionam como sinais de pontuação.

Vamos continuar agora com nossa definição de fórmula, apresentando a segunda cláusula, que trata das fórmulas moleculares:

(2) Se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas.

Aqui aparecem outra vez metavariáveis: 'α' e 'β' são usadas para indicar uma fórmula qualquer. Note que isso tanto pode se referir a fórmulas atômicas, quanto a fórmulas moleculares; assim, se α é a fórmula Pc e β a fórmula $(Gmx \leftrightarrow \neg Km)$, a conjunção de α e β, por exemplo, é $(Pc \wedge (Gmx \leftrightarrow \neg Km))$.

Neste livro vamos adotar a convenção de usar as letras gregas minúsculas α, β, γ e δ como metavariáveis para fórmulas (eventualmente, usando subscritos também, se necessário; α_1, por exemplo). É importante lembrar que elas são variáveis *metalingüísticas*, isto é, elas não fazem parte da linguagem do **CQC**. Assim, se alguém perguntar a você se a expressão '$(\neg\alpha \rightarrow \beta)$' é uma fórmula do **CQC**, você pode dizer tranqüilamente que *não*. Ela é, no máximo, um *esquema* de fórmula; algo que podemos transformar em uma fórmula substituindo 'α' e 'β' por fórmulas.

Você notou que, no caso dos operadores binários, as fórmulas são escritas *entre parênteses*. Isso garante que não haja ambigüidades: se dois operadores binários ocorrem numa fórmula, sempre haverá parênteses para indicar qual dos dois é o principal. Vamos falar sobre isso agora.

6.4 Sinais de pontuação

Os exemplos de sentença que você viu até agora eram bastante simples, envolvendo, em sua maioria, apenas um operador (além, claro, de constantes individuais e de predicado). Contudo, o usual é que tenhamos sentenças de maior complexidade, onde um operador é aplicado a sentenças que já são complexas para formar sentenças mais complexas ainda. Considere o exemplo abaixo:

Se Sócrates é um filósofo e é grego, então Sócrates é mortal.

Obviamente, essa sentença é um condicional, e seu antecedente uma conjunção. Veja:

Se [(Sócrates é um filósofo) e (é grego)], então [Sócrates é mortal].

Admitindo que usemos *s* para designar Sócrates, e *F*, *G* e *M* para simbolizar as propriedades '*x* é um filósofo', '*x* é grego', e '*x* é mortal', teríamos:

$$((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms).$$

Note que a fórmula acima também é um condicional e que corresponde ao condicional em português: o antecedente é a fórmula $(Fs \wedge Gs)$, e o conseqüente, a fórmula Ms.

Imagine agora que *não tivéssemos* os parênteses como sinais de pontuação. A fórmula anterior seria então escrita como

$$Fs \wedge Gs \rightarrow Ms.$$

Contudo, a expressão acima é ambígua, pois ela pode ser lida de duas maneiras, que distinguimos pela colocação de parênteses:

$$((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms) \quad \text{ou} \quad (Fs \wedge (Gs \rightarrow Ms)).$$

No primeiro caso temos o condicional que queríamos, enquanto, no segundo, temos uma *conjunção*: o conjuntivo da esquerda é Fs, e o da direita, o condicional $(Gs \rightarrow Ms)$.

Uma situação parecida acontece na matemática. Se alguém lhe pedisse para calcular o valor da expressão $2 \times 3 + 5$, você provavelmente diria que é 11 — mas por quê? Bem, você deve ter aprendido

na escola alguma regra parecida com "primeiro a multiplicação, depois a soma". Essa regra é que diferencia o caso anterior de $2\times(3+5)$: aqui, você *tem* que usar parênteses para indicar que 2 multiplica o valor da expressão $3+5$, e o resultado final é então 16.

Na lógica, temos[1] que fazer a mesma coisa. Nada indica, à primeira vista, que $Fs \wedge Gs \rightarrow Ms$ deva ser lida como pretendíamos — 'Se Sócrates é um filósofo e é grego, então Sócrates é mortal' — em vez de 'Sócrates é um filósofo e, se Sócrates é grego, então Sócrates é mortal'. Note que são duas sentenças diferentes, como mencionamos acima: uma é um condicional (cujo antecedente é uma conjunção); a outra é uma conjunção (onde um dos conjuntivos é um condicional). Assim, devemos também, neste caso, utilizar parênteses para indicar qual é a leitura desejada. Parênteses são *sinais de pontuação* e constituem mais um tipo de símbolo que faz parte da linguagem do **CQC**.

Para encerrar, uma observação importante: todas as fórmulas moleculares têm parênteses ao redor — exceto as negações. Parênteses só são necessários quando temos operadores binários. Assim, para cada operador binário que ocorrer em uma fórmula, deverá haver nela o par de parênteses correspondente a ele.

Antes de passarmos aos exercícios, vamos ver mais um exemplo de como traduzir uma sentença para a linguagem do **CQC**. Digamos que você queira formalizar o seguinte:

> Salma Hayek é morena, mas Claudia Schiffer e Cameron Díaz não o são.

Como proceder? Bem, obviamente a sentença acima (ou a proposição que ela expressa) envolve três indivíduos — as três damas em questão. Portanto, seria bom ter uma constante individual para cada uma delas. Por exemplo, s, c, e d, respectivamente. Agora, quais são os predicados envolvidos na história? De Salma Hayek, estamos

[1]Na verdade, não temos. Existe um tipo de notação, a *notação polonesa*, que dispensa o uso de parênteses. Basicamente, consiste em escrever o símbolo de operador primeiro, seguido então da ou das expressões a que ele está sendo aplicado. Por exemplo, em vez de escrevermos $(Fs \rightarrow Ms)$, escrevemos $\rightarrow FsMs$. É fácil então ver a diferença entre $((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms)$ e $(Fs \wedge (Gs \rightarrow Ms))$. A primeira seria escrita assim: $\rightarrow\wedge FsGsMs$. A segunda, por outro lado, ficaria assim: $\wedge Fs\rightarrow GsMs$.

dizendo que é morena; logo, precisamos de uma constante de propriedade, M por exemplo, para 'x é morena'. Algo mais? Aparentemente não, você concorda? O que estamos dizendo tanto de Claudia como de Cameron é que *não são morenas*. Assim, nenhuma constante de predicado, além de M, é necessária.

Escolhido esse conjunto de símbolos (constantes individuais e de predicado), vamos então tentar escrever a fórmula. Se olharmos bem para a estrutura da sentença em questão, veremos que ela é assim (usando colchetes para indicar os agrupamentos):

> [Salma Hayek é morena] mas [Claudia Schiffer e Cameron Díaz não o são],

ou seja,

> [Salma Hayek é morena] mas [Claudia Schiffer não é morena e Cameron Díaz não é morena].

Trocando agora 'Salma Hayek é morena' etc. pelas fórmulas correspondentes, ficamos com

$$Ms \text{ mas } [\text{não } Mc \text{ e não } Md].$$

Finalmente, só precisamos dos operadores e parênteses:

$$(Ms \wedge (\neg Mc \wedge \neg Md)).$$

Exercício 6.4 Diga, das expressões abaixo, se são fórmulas ou não, e por que, supondo que A é um símbolo de predicado zero-ário, P e Q são símbolos de propriedade, e R, de relação binária:

(a)	Rab	(e)	$((\neg Rxa \leftrightarrow Qb) \wedge Pc)$
(b)	$\neg Px$	(f)	$(\alpha \vee \neg \beta)$
(c)	aRb	(g)	$((\neg Rxy \rightarrow Qc) \wedge \neg(Pb \vee A))$
(d)	$(Ra \rightarrow Qb)$	(h)	$(A \rightarrow (Pb \vee Rcc))$

Exercício 6.5 Usando a notação sugerida, transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**.
c: Cleo; m: Miau; t: Tweety; F: x é um peixe; P: x é um pássaro; G: x é um gato; M: x é maior do que y; L: x gosta mais de y do que de z.

(a) Cleo não é um pássaro.
(b) Miau não é um peixe.
(c) Miau é um gato ou é um pássaro.
(d) Miau é um gato e é maior que Cleo.
(e) Tweety não é um gato.
(f) Ou Tweety é maior que Miau, ou Miau é maior que Tweety.
(g) Se Miau é maior que Tweety, então Tweety não é maior que Miau.
(h) Miau é maior que Tweety, se Tweety não é maior que Miau.
(i) Se Miau é um gato, então não é um peixe.
(j) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety se e somente se Tweety é um pássaro.
(k) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo, mas Miau não gosta mais de Cleo do que Tweety.
(l) Nem Miau nem Cleo são pássaros.
(m) Tweety não é um gato ou não é um peixe.
(n) Não é verdade que Tweety é um gato e um peixe.
(o) Não é o caso que, se Miau é um gato, então é um peixe.

Exercício 6.6 Formalize as sentenças abaixo, usando a notação sugerida:

(a) Carla é pintora, mas Paulo é jogador de futebol. (c: Carla; p: Paulo; P: x é pintora; J: x é jogador de futebol)
(b) Ou Paulo é um engenheiro, ou Carla o é. (E: x é engenheiro)
(c) Carla é pintora, mas Paulo é engenheiro ou jogador de futebol.
(d) Se Sócrates é o mestre de Platão, então Platão é um filósofo. (s: Sócrates; p: Platão; M: x é o mestre de y; F: x é um filósofo)
(e) Paulo ama Denise, que ama Ricardo. (d: Denise; r: Ricardo; A: x ama y)
(f) Paulo ama a si próprio se e somente se ele é narcisista. (A: x ama y; N: x é narcisista)
(g) Chove ou faz sol. (C: chove; S: faz sol)
(h) Não chove, mas nem faz sol nem está frio. (F: está frio)
(i) João vai à praia, se o tempo estiver bom. (j: João; P: x vai à praia; T: o tempo está bom)
(j) Se o tempo estiver bom, e não fizer muito frio, João irá à praia. (F: faz muito frio)
(k) Se o tempo não estiver bom, então, se fizer muito frio, João não irá à praia.

(l) A Terra é um planeta, e a Lua gira em torno da Terra. (t: a Terra; l: a Lua; P: x é um planeta; G: x gira em torno de y)

(m) Saturno é um planeta, mas não gira em torno de Alfa Centauri. (s: Saturno; a: Alfa Centauri)

(n) A Lua não é um planeta, nem gira em torno de Saturno.

(o) Miau é um gato preto. (m: Miau; G: x é um gato; P: x é preto)

(p) Miau é um gato angorá que não é preto. (A: x é angorá)

(q) Carla é mais alta que Paulo somente se Paulo é mais baixo que Carla. (A: x é mais alto que y; B: x é mais baixo que y)

(r) Carla não é mais alta que Paulo somente se for mais baixa ou tiver a mesma altura que ele. (T: x tem a mesma altura que y)

Exercício 6.7 Traduzir as fórmulas abaixo da linguagem do **CQC** para o português, sendo que:
a: Antonio; b: Bernardo; c: Cláudia; d: Débora;
F: x é um filósofo; G: x gosta de y; D: x detesta y.

(a) Gbd
(b) $(Fb \wedge Fd)$
(c) $(Fb \wedge \neg Fa)$
(d) $(Fa \wedge Gac)$
(e) $(Gbd \wedge Ddb)$
(f) $(\neg Gcb \vee \neg Gbc)$
(g) $(Gbb \rightarrow Dcb)$
(h) $(Gbd \leftrightarrow Dcd)$
(i) $(Dbd \rightarrow (Fb \vee Fd))$
(j) $((Fa \wedge Fc) \rightarrow (Gac \wedge Gca))$

6.5 Quantificadores e fórmulas gerais

Com o que vimos até agora da linguagem do **CQC**, podemos formalizar um grande número de argumentos. Mas que isso ainda é pouco você pode ver pelo exemplo abaixo:

(A2) P Aristóteles é um filósofo.
▶ Alguém é um filósofo.

A premissa do argumento não oferece problema: podemos formalizá-la por Fa, onde F representa a propriedade 'x é um filósofo', e a designa Aristóteles. Porém, que fazer com a conclusão? Estamos afirmando que alguém é um filósofo; logo, a simbolização deveria ser algo como

$$F\ldots$$

Porém, o que vamos colocar no lugar das reticências? Obviamente não podemos colocar aí a constante *a*, pois *Fa* significa que *Aristóteles* é um filósofo, o que não é a mesma coisa que dizer que *alguém* é um filósofo. É fácil ver que também não podemos colocar uma outra constante individual, tal como *b*, para preencher as reticências. Lembre-se de que as constantes funcionam como nomes de indivíduos determinados; assim, *b* estaria designando, digamos, Beatriz, e *Fb* estaria dizendo que Beatriz é uma filósofa. Note que, com a sentença 'alguém é um filósofo', estamos falando, sim, de algum indivíduo, mas não sabemos *qual*; sabemos que ele existe, mas não sabemos seu *nome*.

A solução para esse pequeno impasse é a utilização de variáveis, claro. Contudo, escrever somente

$$Fx$$

para representar a conclusão do argumento apresentado ainda não é o suficiente. Essa fórmula diz apenas que

x é um filósofo,

o que não parece afirmar que haja alguém que o seja. Para entender melhor esse ponto, considere a expressão aritmética $x < 2$. Suponha que estejamos falando dos números naturais: fica difícil dizer se essa expressão é verdadeira ou falsa, não é mesmo? O problema é que não sabemos o que é *x*; não sabemos se estamos falando de um certo *x*, ou de qualquer *x*. Compare isso agora com as duas afirmações abaixo:

$$\text{existe ao menos um } x \text{ tal que } x < 2, \tag{5}$$

$$\text{qualquer que seja } x,\ x < 2. \tag{6}$$

Nesses dois casos, podemos decidir sobre a verdade ou falsidade das afirmações. A primeira é verdadeira, pois existe, de fato, um número natural menor do que 2 (o número 1, por exemplo), enquanto a segunda é falsa: nem todo número natural é menor que 2 (o número 4, por exemplo, é maior que 2). O que fizemos em (5) e (6), ao contrário do caso $x < 2$ anterior, foi introduzir um *quantificador* para agir sobre a variável.

O quantificador em (5) é chamado *quantificador existencial*, e corresponde, em português, às expressões 'existe pelo menos um', 'alguns', 'algum', 'alguém' etc. (É claro que, em português, a palavra 'alguns', estando no plural, dá a entender que há mais de um indivíduo envolvido, mas, de qualquer forma, está garantido que há pelo menos um — e é assim que entendemos o quantificador existencial.) Agora, como você vê em (5) acima, a expressão 'existe ao menos um' vem associada a uma *variável*: 'existe ao menos um x tal que'. Para representar o quantificador existencial, portanto, vamos utilizar o símbolo $\exists$, que sempre empregamos seguido de uma variável: $\exists x$, por exemplo, ou $\exists y$. Dito de outra forma, um quantificador existencial é uma expressão da forma $\exists\mathbf{x}$, em que $\mathbf{x}$ é uma variável individual. (Usaremos '$\mathbf{x}$', '$\mathbf{y}$', e '$\mathbf{z}$', em negrito, como metavariáveis para as variáveis da linguagem do **CQC**.)

Dispondo do quantificador existencial, a conclusão do argumento (A2) pode ser formalizada assim:

$$\exists xFx,$$

que afirma que existe ao menos um x no universo de discurso que tem a propriedade de ser filósofo. Ou seja, alguém é filósofo.

O outro tipo de quantificador, aquele que aparece em (6), é o *quantificador universal*, que corresponde às locuções 'para todo', 'qualquer que seja', 'todos', 'cada', e assim por diante. Para representá-lo, usaremos o símbolo $\forall$ — naturalmente, seguido de uma variável. Ou seja, um quantificador universal é uma expressão da forma $\forall\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é uma variável individual. Assim, se quisermos formalizar a sentença 'Todos são filósofos', teremos

$$\forall xFx.$$

Uma variante disso pode ser

$$\forall yFy.$$

Essas duas fórmulas dizem a mesma coisa: não importa se usamos a variável x, ou y, estamos afirmando que todo indivíduo do universo tem a propriedade de ser filósofo.

Com a introdução de quantificadores temos, então, um terceiro tipo de fórmula, além das atômicas e moleculares que já vimos no capítulo anterior: as fórmulas *gerais*, que são, naturalmente, aquelas que se iniciam por um quantificador. A cláusula correspondente, em nossa definição de fórmula, é a seguinte:

(3) Se $\mathbf{x}$ é uma variável e α é uma fórmula na qual $\mathbf{x}$ ocorre, então $\forall\mathbf{x}\alpha$ e $\exists\mathbf{x}\alpha$ são fórmulas.

Dizendo de outra forma o que está escrito acima, basta tomar uma fórmula α qualquer e prefixá-la com um quantificador universal ou existencial (ou seja, uma expressão da forma $\forall\mathbf{x}$ ou $\exists\mathbf{x}$) para obter uma fórmula geral — claro, com a restrição de que a variável $\mathbf{x}$ do quantificador ocorra na fórmula. Por exemplo, se tomarmos a fórmula $(Px \rightarrow Qy)$ e colocarmos um quantificador à frente dela, como em $\forall x(Px \rightarrow Qy)$, teremos uma fórmula geral. E se prefixarmos agora essa fórmula com um quantificador existencial como $\exists y$, ficamos com $\exists y\forall x(Px \rightarrow Qy)$, que, obviamente, também é uma fórmula geral.

Note agora que, segundo a definição acima, expressões como $\exists xPa$ e $\forall x(Py \vee Qy)$ não são fórmulas gerais. Em ambos os casos, claro, o quantificador é desnecessário; mas a razão pela qual não são fórmulas é que a variável do quantificador, x no caso, não ocorre na fórmula sendo quantificada: x não ocorre nem em Pa, nem em $Py \vee Qy$. Por outro lado, é claro que $\forall y(Py \vee Qy)$ é uma fórmula geral. Como $(Py \vee Qy)$ é uma fórmula (molecular), e y é uma variável que ocorre nela, $\forall y(Py \vee Qy)$ também é fórmula.

A nossa definição de fórmula geral, contudo, não elimina alguns casos estranhos de quantificadores supérfluos. Por exemplo, está claro que $(\forall xPx \vee \forall xQx)$ é uma fórmula — molecular, no caso. O que aconteceria agora se prefixássemos essa fórmula com um quantificador, ficando com, digamos, $\exists x(\forall xPx \vee \forall xQx)$. Você diria que o resultado é uma fórmula?

Pensando bem, é, pois $(\forall xPx \vee \forall xQx)$ é fórmula na qual x ocorre, e $\exists x$ é um quantificador. Mas é claro que, nesse caso, o quantificador para x não vai ter influência alguma sobre o restante da fórmula: ele é supérfluo. (Existem, de fato, outras maneiras de definir fórmula que eliminam casos como esses, porém, às custas de uma definição um pouco mais complicada.)

Como você viu pela definição, podemos classificar as fórmulas em três grandes grupos: as atômicas, as moleculares e as gerais. Você pode dizer que as fórmulas atômicas são aquelas cujo primeiro símbolo é um símbolo de predicado (ou único símbolo, no caso de um predicado zero-ário). Já as moleculares iniciam com $\neg$ ou com o parêntese esquerdo (, como em $\neg Fx$ ou $(Fa \to Qb)$. As fórmulas gerais, então, são aquelas cujo primeiro símbolo é $\forall$ ou $\exists$.

Para encerrar este capítulo, vamos ver mais alguns exemplos simples de como formalizar no **CQC** sentenças envolvendo quantificação. Usando L para a relação binária 'x gosta de y', vamos formalizar a sentença 'alguém gosta de Miau'. O resultado é

$$\exists xLxm.$$

Ou seja, existe algum indivíduo, x, tal que x gosta de m, Miau. Por outro lado, se quisermos escrever na linguagem do **CQC** que todos gostam de Miau, podemos fazê-lo através de

$$\forall xLxm,$$

ou seja, qualquer que seja x, x gosta de Miau. Note que isso é diferente de

$$\forall xLmx,$$

pois essa fórmula afirma que, qualquer quer seja x, Miau gosta de x. Em outras palavras, Miau gosta de todos. De modo análogo, 'Miau gosta de alguém' torna-se

$$\exists xLmx.$$

E como faríamos com 'Se alguém gosta de Miau, então Miau gosta de alguém'? É simples. Obviamente temos um condicional (usando colchetes para indicar seus elementos):

Se [alguém gosta de Miau], então [Miau gosta de alguém].

Assim, basta transcrever o antecedente e o conseqüente, colocando $\to$ entre ambos, e parênteses ao redor:

$$(\exists xLxm \to \exists xLmx).$$

Se agora combinarmos um quantificador com o operador de negação, poderemos transcrever para a linguagem do **CQC** outras expressões que também envolvem quantificação — expressões como 'ninguém', 'nem todos', 'nada', e assim por diante. Para dar um exemplo, vamos simbolizar a sentença

Ninguém é um filósofo.

Obviamente, ao dizer que ninguém é um filósofo estamos negando que alguém o seja. Portanto:

$$\neg\exists xFx.$$

Isto é, não há nenhum x no universo que tenha a propriedade de ser filósofo. Porém, isso também pode ser dito usando o quantificador universal: se ninguém é um filósofo (isto é, se não existem filósofos), então qualquer que seja o indivíduo x no universo, x *não é* um filósofo. Assim:

$$\forall x\neg Fx.$$

Ou seja, dizer que ninguém é um filósofo é a mesma coisa que dizer que todos não são filósofos.

Agora, é claro que existe uma diferença entre dizer que *ninguém* é filósofo e que *nem todos* são filósofos. Afirmar 'nem todos são filósofos' é negar que todos sejam filósofos, isto é, estamos fazendo a negação de 'todos são filósofos', o que pode ser formalizado assim:

$$\neg\forall xFx.$$

Ou então, já que afirmar que nem todos são filósofos é afirmar que existe alguém que não é, assim:

$$\exists x\neg Fx.$$

Espero que esses exemplos iniciais tenham dado a você uma pequena idéia do que se pode fazer com os quantificadores. Mais tarde veremos como formalizar algumas sentenças bem mais complicadas. Por enquanto, tente ir resolvendo os exercícios a seguir.

Exercício 6.8 Supondo que C é um predicado zero-ário, que P e Q são predicados unários, e que T e R são predicados binários, diga quais das expressões abaixo são fórmulas e, caso sejam, se são atômicas, moleculares, ou gerais.

(a)	$\forall x(Px \lor Tay)$	(d)	$\exists Rax \leftrightarrow Pab$
(b)	$(\exists xQx)$	(e)	$(\neg Rax \leftrightarrow Tab)$
(c)	$(\neg C \rightarrow \forall xC)$	(f)	$\neg\forall w(\neg Rxy \rightarrow (Qx \lor Tzw))$

Exercício 6.9 Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:

(a) Algo é branco. (B: x é branco)
(b) Tudo é azul. (A: x é azul)
(c) Alguma coisa não é azul. (A: x é azul)
(d) Algo é bonito. (B: x é bonito)
(e) Todos são mortais. (M: x é mortal)
(f) Nada é insubstituível. (I: x é insubstituível)
(g) Nem tudo dura para sempre. (D: x dura para sempre)
(h) Centauros não existem. (C: x é um centauro)
(i) Alguma coisa não é verde. (G: x é verde)
(j) Cada objeto é igual a si mesmo. (I: x é igual a y)
(k) Há objetos que não são iguais a si mesmos.
(l) Nem tudo é cor-de-rosa. (R: x é cor-de-rosa)
(m) Nada é cor-de-rosa.
(n) Alguém é mais velho que Pedro. (p: Pedro; O: x é mais velho que y)
(o) Ninguém é mais velho que Pedro.
(p) Matusalém é mais velho que alguém. (m: Matusalém)
(q) Matusalém é mais velho que todos.
(r) Não é verdade que Matusalém é mais velho que todos.
(s) Alguém gosta de si mesmo. (G: x gosta de y)
(t) Todos gostam de si mesmos.
(u) Ninguém gosta de Miau. (m: Miau)
(v) Alguém não gosta de si mesmo.
(w) Não existe alguém que goste de si mesmo.
(x) Não existe alguém que não goste de si mesmo.
(y) Ninguém gosta mais de Paulo do que de Denise. (p: Paulo; d: Denise; L: x gosta mais de y do que de z)
(z) Nem todos gostam mais de Paulo do que de Denise.

CAPÍTULO 7

A SINTAXE DO CÁLCULO DE PREDICADOS (II)

Neste capítulo, vamos nos ocupar, de forma mais sistemática, da linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem.

7.1 Linguagens de primeira ordem

Vamos começar relembrando como é constituída a linguagem do CQC.

Definição 7.1 A *linguagem geral do cálculo de predicados de primeira ordem consiste em:*

(1) *um conjunto enumerável de constantes individuais;*
(2) *para cada número natural* $n \geq 0$, *um conjunto enumerável de constantes de predicado n-árias;*
(3) *um conjunto enumerável de variáveis individuais;*
(4) *operadores;*
(5) *quantificadores;*
(6) *sinais de pontuação.*

As expressões em (3), (4), (5) e (6) são chamadas *símbolos lógicos*, enquanto aquelas em (1) e (2) são chamadas *símbolos não-lógicos*. Observe que temos um número infinito de variáveis e constantes individuais: isso nos garante um suprimento inesgotável delas, caso

precisemos. Temos também um número infinito de símbolos de predicado. Na verdade, para cada número natural $n \geq 0$, temos infinitos predicados n-ários. A intenção disso é também a de ter tantos símbolos quantos possamos eventualmente precisar, sejam eles símbolos de propriedades, relações binárias, relações ternárias, e assim por diante.

Você poderia objetar que, na prática (por exemplo, nos exercícios feitos até agora), sempre acabamos usando não mais que uma dúzia de constantes individuais e de predicado. Por que insistir em ter um número infinito delas?

Bem, a definição acima é da linguagem *geral* do **CQC**. O que acontece é que usualmente trabalhamos apenas com algum subconjunto dessa linguagem geral — e a esses subconjuntos (que, a propósito, incluem todos os símbolos lógicos) chamamos de *uma* linguagem de primeira ordem.

Definição 7.2 *Uma linguagem de primeira ordem é qualquer subconjunto da linguagem geral do* **CQC** *que inclua todos os símbolos lógicos e pelo menos uma constante de predicado.*

A restrição colocada acima de que tenhamos ao menos uma constante de predicado tem a seguinte razão de ser: ainda que você não disponha de constantes individuais, você pode construir fórmulas se dispuser de pelo menos um símbolo de predicado. Por exemplo, se o único símbolo não-lógico for o símbolo de propriedade F, ainda assim você pode gerar as fórmulas Fx, $(\neg Fx \vee \forall y Fy)$ etc. Contudo, mesmo dispondo de constantes individuais, sem símbolos de predicado nenhuma fórmula pode ser gerada: lembre-se de que as fórmulas moleculares são construídas a partir das atômicas, e que estas *começam com um símbolo de predicado.*

Vamos ver agora um exemplo de uma linguagem de primeira ordem. Suponha que estamos formalizando sentenças e argumentos que falam de gatos, peixes e estrelas, e de alguns deles em particular, como Miau, Cleo e Alfa Centauri. Assim, precisamos ter símbolos para propriedades como 'x é um gato' (um peixe, uma estrela), para o que podemos usar G, P, e E, bem como constantes para os indivíduos mencionados: digamos, m, c e a. Mas, se tudo o que pretendemos

dizer a respeito desses indivíduos pode ser dito usando os símbolos acima, é claro que não vamos precisar de outros. Deste modo, nossa linguagem — vamos chamá-la de '$\mathcal{L}_1$' — se resume ao seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}_1 = \{a, c, m, G, E, P\},$$

que inclui, além desses símbolos, todos os símbolos lógicos (que não vamos repetir aqui). Por outro lado, se estivermos formalizando, por exemplo, demonstrações aritméticas, envolvendo números naturais, então introduziremos símbolos para relações entre números, como M para 'x é menor que y', ou P para 'x é um número par' etc. Além disso, provavelmente gostaríamos de ter constantes individuais para denotar cada um dos números; digamos, a para 0, a_1 para 1, ou seja, no geral, a_n para um número n. (Note que não podemos usar 0, 1 etc., como constantes individuais, pois convencionamos que nossas constantes têm que ser *letras minúsculas*, eventualmente com subscritos.) Teremos então a linguagem

$$\mathcal{L}_2 = \{a, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, M, P\}.$$

Desse modo, em cada domínio de investigação em que estejamos pretendendo trabalhar — em cada *teoria* que fazemos —, usamos um subconjunto da linguagem geral de primeira ordem definida anteriormente. Conforme foi acima observado, esses subconjuntos devem incluir obrigatoriamente todos os símbolos lógicos: variáveis, operadores, quantificadores e parênteses. No entanto, como todas as linguagens de primeira ordem incluem os símbolos lógicos, ao especificar uma delas basta que indiquemos quais são seus símbolos *não-lógicos*. É o que fizemos acima com as linguagens $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.[1]

Uma última observação: claro que uma das linguagens de primeira ordem possíveis é justamente a linguagem geral; aquela que contém *todos* os símbolos não-lógicos que podemos especificar. Mas, como eu

[1]Pode parecer um abuso usar o termo 'linguagem' para designar simplesmente um conjunto de símbolos — afinal, não havíamos dito que, para especificar uma linguagem formal, precisamos do alfabeto *e de uma gramática?* Mas, claro, no caso de linguagens de primeira ordem, a gramática já está dada: as definições de 'termo' e 'fórmula'.

disse, na prática, dificilmente precisaremos de mais que algum número pequeno de símbolos não-lógicos.

Uma *expressão* de uma linguagem de primeira ordem é qualquer seqüência finita de símbolos do alfabeto dessa linguagem: por exemplo, tanto $(\neg Ex \vee Ea)$ quanto $m \rightarrow \rightarrow \forall \neg$ são expressões de $\mathcal{L}_1$ acima (i.e., expressões construídas a partir dos símbolos de $\mathcal{L}_1$). Porém, nem todas as expressões de uma linguagem são bem-formadas, ou seja, no nosso caso, termos e fórmulas. Vamos recordar primeiro o que são os *termos* de uma linguagem.

Definição 7.3 *Os termos de uma linguagem de primeira ordem são suas variáveis e constantes individuais.*

E, a seguir, a definição das fórmulas de uma linguagem:

Definição 7.4 *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Dizemos que:*

(1) *Se* $\mathbf{P}$ *é um símbolo de predicado n-ário, para um número natural* $n \geq 0$, *e* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ *são termos, então* $\mathbf{Pt}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ *é uma fórmula (atômica);*

(2) *Se* α *e* β *são fórmulas, então* $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, *e* $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ *são fórmulas (moleculares);*

(3) *Se* $\mathbf{x}$ *é uma variável e* α *é uma fórmula na qual* $\mathbf{x}$ *ocorre, então* $\forall \mathbf{x} \alpha$ *e* $\exists \mathbf{x} \alpha$ *são fórmulas (gerais);*

(4) *Nada mais é uma fórmula.*

Essa definição repete as três cláusulas que já havíamos visto, e acrescenta uma nova. Note, primeiramente, que, na cláusula (1) o valor de n pode ser igual a zero, caso em que teremos uma letra sentencial. A cláusula (4), por outro lado, garante que apenas as expressões que são definidas pelas cláusulas (1)–(3) sejam fórmulas; tudo o mais não. Isto evita que, eventualmente, pudéssemos ter outras expressões que fossem fórmulas, mas cuja regra de formação não conhecemos. Por exemplo, será que $x\exists xP$ é uma fórmula? Bem, basta verificar se essa expressão se enquadra em alguma das três primeiras cláusulas da definição acima. Ela certamente não é uma fórmula atômica, pois o primeiro caractere de uma fórmula atômica tem que ser uma letra maiúscula. Ela não é uma fórmula molecular, pois o

primeiro caractere de uma fórmula molecular é ou o símbolo de negação, $\neg$, ou o parêntese esquerdo (. Finalmente, $x\exists xP$ não é uma fórmula geral, pois o primeiro caractere de uma fórmula geral deve ser ou $\forall$ ou $\exists$. Assim, se ela não se enquadra em nenhuma das três primeiras cláusulas da definição, ela poderia ser uma fórmula? Não: a cláusula (4) proíbe isso explicitamente.

Como eu havia mencionado, o tipo de definição que demos para as fórmulas chama-se *definição indutiva*, ou *recursiva*. Temos um caso-base — as fórmulas atômicas — e as demais fórmulas são obtidas a partir destas, usando-se operadores, quantificadores e parênteses. Isso nos permite construir fórmulas bastante longas e complexas — não há limite para o tamanho que uma fórmula possa ter (embora, claro, todas elas tenham um comprimento finito).

Noções relacionadas à noção de fórmula são as de *subfórmula* e *subfórmula imediata*. Vamos ilustrar isso tomando $((\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx)) \to \neg Pb)$ como exemplo.

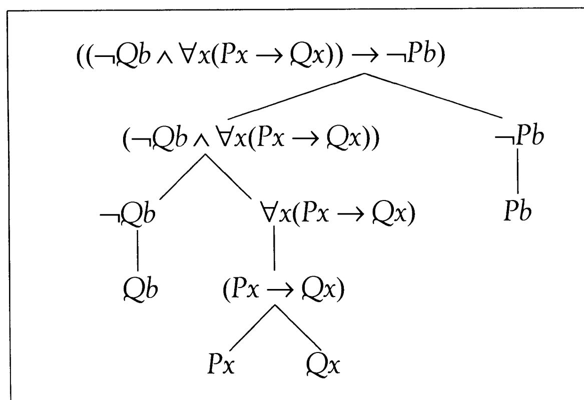


FIGURA 7.1 — $((\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx)) \to \neg Pb)$ e suas subfórmulas.

Na figura 7.1, temos essa fórmula, que é um condicional, na parte de cima, e imediatamente abaixo dela, seus componentes esquerdo e direito — que chamamos de suas *subfórmulas imediatas*, a saber, $(\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx))$ e $\neg Pb$. Para cada uma dessas duas fórmulas temos também suas subfórmulas imediatas (ou subfórmula imediata, se for só uma: no caso, $\neg Pb$ tem apenas um componente, que é Pb).

Repetindo esse procedimento, você vê que chegamos a um nível básico, onde temos as fórmulas atômicas.

Vamos aproveitar a ocasião e definir, do modo seguinte, o que são as *subfórmulas imediatas* de uma fórmula qualquer:

(i) fórmulas atômicas não têm subfórmulas imediatas;

(ii) a subfórmula imediata de $\neg\alpha$ é α;

(iii) as subfórmulas imediatas de $(\alpha \land \beta)$, $(\alpha \lor \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são α e β;

(iv) a subfórmula imediata de $\forall \mathbf{x}\alpha$ e de $\exists \mathbf{x}\alpha$ é α.

De modo análogo, podemos definir o conjunto de todas as *subfórmulas* de α: isso inclui as subfórmulas imediatas de α, as subfórmulas imediatas destas, e assim por diante, até chegarmos às fórmulas atômicas. Dito de outra forma, o conjunto das subfórmulas de α inclui sua(s) subfórmula(s) imediata(s), bem como todas subfórmulas dela(s). A figura 7.1, portanto, apresenta todas as subfórmulas de $((\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx)) \to \neg Pb)$. Nessa figura temos o que se chama a *árvore de formação* da fórmula. Ela mostra como a fórmula foi construída a partir das fórmulas atômicas que a compõem.

Além de atômicas, moleculares, gerais, há uma outra maneira de classificar as fórmulas: por meio daquelas que são *abertas*, e das que são *fechadas*. Mas, para definir isso, precisamos primeiro falar sobre *escopo* de quantificadores e sobre ocorrências *livres* e *ligadas* de variáveis.

Os quantificadores agem apenas sobre a fórmula que inicia imediatamente após a variável do quantificador. O âmbito de ação de um quantificador é chamado de *escopo* do quantificador, e pode ser definido da seguinte maneira: numa fórmula da forma $\forall \mathbf{x}\alpha$ ou $\exists \mathbf{x}\alpha$, o escopo do quantificador é α. Em outras palavras, o escopo de um quantificador é apenas a fórmula que o segue, aquela cujo primeiro símbolo ocorre imediatamente após o quantificador. Vamos ver alguns exemplos, começando por

$$\forall x(Px \to Qx). \qquad (1)$$

Nesse caso, o escopo do quantificador $\forall x$ é a fórmula que se inicia imediatamente após a ocorrência de $\forall x$, ou seja, a fórmula cujo primeiro símbolo é o parêntese esquerdo: $(Px \to Qx)$.

Considere agora a seguinte fórmula:

$$(\forall x Px \to \forall y \exists z Fzy). \tag{2}$$

Nesse caso, o escopo de $\forall x$ — a fórmula que se inicia imediatamente após a variável — é Px. E apenas isto: $\forall y \exists z Fzy$ já está *fora* do escopo de $\forall x$. Note que (2) não é uma fórmula geral: seu primeiro símbolo é o parêntese esquerdo, logo, é uma fórmula molecular. Com relação ao escopo de $\exists z$, na fórmula acima, ele é claramente a fórmula Fzy. E o escopo de $\forall y$? Obviamente, a fórmula que se inicia imediatamente após $\forall y$, ou seja, a fórmula cujo primeiro símbolo é $\exists$: a fórmula $\exists z Fzy$.

Dizemos agora que uma ocorrência de uma variável $\mathbf{x}$ é *ligada*, numa fórmula α, se $\mathbf{x}$ ou faz parte de um quantificador, ou está no escopo de um quantificador para $\mathbf{x}$ em α. Isto é, se $\mathbf{x}$ ocorre em alguma parte de α que é da forma $\forall \mathbf{x} \beta$ ou $\exists \mathbf{x} \beta$. Por exemplo, na fórmula

$$(\forall x \forall z Lxz \wedge Qz) \tag{3}$$

temos duas ocorrências da variável x: a primeira faz parte do quantificador, e a segunda, após o L, em Lxz. Ambas as ocorrências de x são ligadas: a primeira, por ser a variável do quantificador, e a segunda, por estar dentro de seu escopo. Dito de outra forma, porque ocorre em uma parte de $(\forall x \forall z Lxz \wedge Qz)$ que é da forma $\forall x \beta$, a saber, $\forall x \forall z Lxz$ (onde $\beta = \forall z Lxz$).

Por outro lado, qualquer ocorrência de alguma variável $\mathbf{x}$ numa fórmula α que esteja fora do escopo de qualquer quantificador para $\mathbf{x}$ é chamada de uma ocorrência *livre* dessa variável em α. A última ocorrência da variável z na fórmula (3) acima, portanto, é livre, pois o quantificador $\forall z$ não está agindo sobre ela (a fórmula é molecular, o operador principal é $\wedge$, e o escopo de $\forall z$ é apenas a fórmula Lxz).

É preciso mencionar que uma ocorrência de variável é sempre livre ou ligada *relativamente a alguma fórmula*. Por exemplo, embora todas as ocorrências de x em $\forall x \neg Lxx$ sejam ligadas, as ocorrências de x em $\neg Lxx$ são livres.

Uma fórmula é chamada *aberta* se possui pelo menos uma ocorrência livre de alguma variável, como $\forall x \exists z Qxyz$ ou $(Fw \rightarrow \forall w Fw)$, nas quais as variáveis y e w, respectivamente, ocorrem livres. Note que as outras duas ocorrências de w em $(Fw \rightarrow \forall w Fw)$ estão ligadas — mas isto não importa; basta *uma* ocorrência livre, seja de que variável for, e a fórmula é aberta.

De modo análogo, uma fórmula é chamada de *fechada* caso não possua nenhuma ocorrência livre de variável, como $(\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge \exists w Rw)$. As fórmulas fechadas são chamadas ainda de *sentenças*.

Antes de passarmos aos exercícios, introduziremos uma pequena convenção para facilitar um pouquinho na escrita das fórmulas. Conforme vimos no capítulo anterior, o uso de parênteses elimina as ambigüidades. Contudo, como você já deve ter notado, um excesso de parênteses pode acabar prejudicando a facilidade em ler uma fórmula. Em razão disso, é usual introduzir-se uma série de abreviações, ou seja, convenções que nos permitem, em alguns casos, eliminar parênteses "desnecessários". Por exemplo, a primeira coisa que se pode fazer é dispensar os parênteses externos de uma fórmula molecular, se ela está escrita isoladamente. Assim, podemos escrever

$$(Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms$$

como uma abreviação de

$$((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms),$$

e

$$\forall x \forall y Rxy \wedge \exists z (Qz \vee Pz)$$

como uma abreviação de

$$(\forall x \forall y Rxy \wedge \exists z (Qz \vee Pz)).$$

Essa vai ser nossa primeira convenção com respeito a abreviaturas. Por enquanto, ela será a única; bem mais tarde veremos algumas outras.

Uma última observação. Suponha que tenhamos escrito uma fórmula sem os parênteses externos; digamos, $Rab \rightarrow (Px \wedge Qx)$. Se quisermos agora tomar essa fórmula e negá-la (por exemplo), teremos

que *recolocar* os parênteses: $\neg(Rab \rightarrow (Px \wedge Qx))$. Se não fizermos isso, a ausência de parênteses deixaria $\rightarrow$ como o operador principal da fórmula. Ou seja, $\neg Rab \rightarrow (Px \wedge Qx)$ é obviamente um condicional. Por quê? Bem, como os únicos parênteses que deixamos de escrever, pela nossa convenção, são os externos, se fôssemos reintroduzi-los em $\neg Rab \rightarrow (Px \wedge Qx)$ teríamos $(\neg Rab \rightarrow (Px \wedge Qx))$ — um condicional.

De modo similar, se quisermos quantificar universalmente a fórmula $Rab \rightarrow (Px \wedge Qx)$, ela deve obviamente ser recolocada entre parênteses. O resultado seria a fórmula $\forall x(Rab \rightarrow (Px \wedge Qx))$. Resumindo, se quisermos tomar $Rab \rightarrow (Px \wedge Qx)$ para fazer com ela qualquer operação, primeiro recolocamos os parênteses. Lembre-se de que ela não é uma fórmula verdadeira, apenas a *abreviação* de uma fórmula. Os parênteses externos, embora não apareçam mais, devem ser entendidos como ainda "estando lá", escondidos.

A partir dos exercícios abaixo essa convenção já está em uso.

Exercício 7.1 Construa a árvore de formação para cada uma das fórmulas abaixo, e faça a lista de suas subfórmulas:

(a)	$\neg Fa \wedge Gb$	(d)	$(\forall x \exists y Rxy \vee \neg Fa) \rightarrow \neg Rab$
(b)	$\neg(Fa \wedge (\neg Gb \rightarrow Rab))$	(e)	$\neg(Fa \wedge Gb) \rightarrow \neg(Rbc \wedge Gb)$
(c)	$Rtp \leftrightarrow \forall x(Rtx \wedge \exists y Rxy)$	(f)	$\neg\neg\forall x \exists y Rxy \wedge (Fa \rightarrow Rbc)$

Exercício 7.2 Diga se as fórmulas abaixo são sentenças ou não, qual é o escopo de cada quantificador e quais são variáveis que ocorrem livres ou ligadas nelas.

(a)	Fx	(h)	$\exists x \forall y Gxy \rightarrow \forall y \exists x Gyx$
(b)	$\forall x Fx$	(i)	$\forall x Fx \vee \neg Fx$
(c)	Pa	(j)	$Pa \rightarrow (Pa \rightarrow Pa)$
(d)	$\forall y \neg Py$	(k)	$Ax \rightarrow \forall x Ax$
(e)	$\neg\forall x Fx \vee Ga$	(l)	$(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa) \leftrightarrow Qx$
(f)	$\forall x Px \rightarrow Qb$	(m)	$\neg Pa \wedge \neg Qb$
(g)	$\forall x(\forall y Rxy \rightarrow Ryx)$	(n)	$\forall x \exists y \forall z((Sxyz \wedge Szya) \rightarrow Cx)$

7.2 Proposições categóricas

No restante deste capítulo, vamos ver alguns exemplos mais complicados de como traduzir, para a linguagem do **CQC**, sentenças que

envolvem quantificação. Alguns desses exemplos, clássicos na história da lógica, dizem respeito às proposições (ou sentenças) *categóricas*, da teoria do silogismo de Aristóteles. As proposições categóricas são aquelas que correspondem a uma das quatro formas seguintes:

- Todo *A* é *B* (universal afirmativa)
- Nenhum *A* é *B* (universal negativa)
- Algum *A* é *B* (particular afirmativa)
- Algum *A* não é *B* (particular negativa)

em que as letras *A* e *B* funcionam como variáveis para expressões que especificam classes, como 'homem', 'gato', 'mamífero aquático', 'professor de violino que mora no Canto da Lagoa' etc. Como tais proposições são o material de que os silogismos são construídos, e como a teoria do silogismo era considerada a lógica até meados do século passado, seria interessante ver como dar conta delas usando a linguagem do **CQC**.

A propósito, há várias maneiras em português de expressar uma proposição categórica. Por exemplo, no caso de uma universal afirmativa como 'Todo gato é mamífero', poderíamos dizer também: 'Todos os gatos são mamíferos', 'Os gatos são mamíferos', 'Gatos são sempre mamíferos', 'Somente (só, apenas) os mamíferos são gatos', 'Se algo é um gato, então é um mamífero' etc. Variações estilísticas semelhantes são também possíveis para os outros casos.

Você pode estar se perguntando se não houve um erro a respeito de uma das variações acima. 'Somente os mamíferos são gatos' diz a mesma coisa que 'todos os gatos são mamíferos'? É isso mesmo?

É isso mesmo. Veja, há uma diferença entre dizer que *somente* os mamíferos são gatos e que *todos* os mamíferos são gatos, concorda? A segunda afirmação é falsa, pois nem todos os mamíferos são gatos (há os morcegos e ornitorrincos, por exemplo). Por outro lado, que dizer de 'somente os mamíferos são gatos'? Parafraseando isso, chegamos a algo como 'não existe algo que não seja mamífero, mas que seja um gato'. Ou seja, se algo é um gato, tem que ser um mamífero. Ou seja, mais uma vez, todos os gatos são mamíferos.

Vamos então ver como traduzir proposições categóricas para a nossa linguagem artificial, começando pelas particulares afirmativas. Por exemplo, digamos que queremos formalizar a sentença 'alguns peixes

são azuis' — ou, de modo equivalente em português, 'algum peixe é azul', ou 'alguma coisa é um peixe azul'. Bem, se quiséssemos formalizar 'Cleo é um peixe azul', teríamos, como você se recorda do capítulo anterior,

$$Pc \wedge Ac$$

(já tendo eliminado os parênteses externos). Mas como ficaria, então, 'alguns peixes são azuis'? Obviamente teremos que utilizar variáveis e o quantificador existencial. Parafraseando a sentença em questão, temos algo assim:

Há ao menos um *x* que é um peixe e é azul,

ou seja,

Há ao menos um *x* tal que: *x* é um peixe e *x* é azul.

O resultado final, portanto, é

$$\exists x(Px \wedge Ax),$$

que diz que existe ao menos um *x* que tem as duas propriedades: ser peixe e ser azul.

Note que, na fórmula acima, os parênteses não podem ser esquecidos! Você ainda recorda a distinção entre, digamos, $\neg Pc \wedge Ac$ e $\neg(Pc \wedge Ac)$? No primeiro caso, temos uma conjunção; no segundo, a negação de uma conjunção. Assim, se escrevermos

$$\exists x Px \wedge Ax,$$

apenas a variável em *Px* está sendo quantificada; a ocorrência de *x* em *Ax* está fora do escopo do quantificador e, portanto, livre.

Se quiséssemos agora formalizar a sentença a seguir:

Algo é um cachorro, e algo é um peixe. (4)

teríamos

$$\exists x Cx \wedge \exists x Px. \quad (5)$$

Note, primeiro, que a sentença (4) acima não é categórica. Depois, as duas ocorrências de $\exists x$ acima são completamente independentes: de um lado estamos afirmando que alguma coisa é um cachorro, $\exists xCx$, enquanto, de outro, afirmamos que algo é um peixe: $\exists xPx$. E esses indivíduos podem ser (no caso de peixes e cachorros, certamente são) distintos. Observe que a fórmula acima é diferente de

$$\exists x(Cx \wedge Px).$$

Esta, sim, diz que há um indivíduo que tem as duas propriedades: a de ser um cachorro e a de ser um peixe, o que no mundo real não é verdade. Se quiser enfatizar a possibilidade de que os indivíduos sejam distintos, você poderia ter formalizado a sentença (4) por meio de

$$\exists xCx \wedge \exists yPy,$$

mas isso não altera muita coisa, uma vez que as duas fórmulas são equivalentes. Como eu disse, as duas ocorrências de $\exists x$ em (5) são independentes uma da outra, e tanto faz que variável você utiliza — o uso de variáveis distintas não quer dizer que haja dois indivíduos diferentes envolvidos na história.

Vejamos agora um exemplo de uma proposição categórica do tipo particular negativa, como 'algum pingüim não mora na Antártida'. O que queremos dizer com isso é que existe pelo menos um indivíduo que tem a propriedade de ser um pingüim, mas que não tem a propriedade de morar na Antártida. Parafraseando isso, temos:

Há pelo menos um x tal que: x é um pingüim e
x não mora na Antártida.

Ou seja, usando P para 'x é um pingüim', e A para 'x mora na Antártida':

$$\exists x(Px \wedge \neg Ax).$$

Mas nem todas as expressões que representam classes nas proposições categóricas precisam ser propriedades simples como 'x é um peixe'. Podemos ter coisas mais complexas, envolvendo vários símbolos de predicado. Digamos que pretendemos formalizar a sentença 'algum pingüim que mora na Antártida não gosta de frio'. Isso é um

outro exemplo de uma particular negativa: algum A (um pingüim que mora na Antártida) não é um B (um indivíduo que gosta de frio). Ou seja:

> Algum [pingüim que mora na Antártida] não é [um indivíduo que gosta de frio].

Usando F para 'x gosta de frio', temos então:

$$\exists x((Px \land Ax) \land \neg Fx).$$

Vamos agora examinar alguns exemplos com o quantificador universal, começando com uma universal afirmativa como 'todo peixe é azul'. Tentemos fazer uma paráfrase dessa sentença. Podemos começar com 'Qualquer peixe é azul', ou 'qualquer coisa que seja um peixe azul', ou 'para qualquer coisa, é verdade que, se esta coisa é um peixe, então é azul'.

Esta última paráfrase já nos coloca mais próximos do que desejamos. Note que apareceu nela um operador, o nosso 'se ... então ...'. Assim, nossa paráfrase ficará mais ou menos como segue, substituindo x por 'esta coisa':

Para qualquer x, se x é um peixe então x é azul.

Isto corresponde a

$$\forall x(x \text{ é peixe} \rightarrow x \text{ é azul}),$$

que é imediatamente formalizável da seguinte maneira:

$$\forall x(Px \rightarrow Ax).$$

Note, portanto, que na estrutura da sentença 'todo peixe é azul' está escondida uma implicação.

Obviamente, não podemos formalizar a sentença 'todo peixe é azul' com

$$\forall x(Px \land Ax).$$

Esta fórmula, na verdade, está dizendo que

qualquer que seja o indivíduo x, x é um peixe *e* x é azul,

ou seja, que todos os indivíduos do universo têm as duas propriedades: ser peixe e ser azul. Isso só é verdade, claro, num universo de peixes azuis — i.e., num universo onde todos os indivíduos, sem exceção, são peixes azuis. Contudo, não é isso que a sentença original afirmava. Você percebe a diferença entre '*Todos* são peixes azuis' e '*Todos os peixes* são azuis', não é mesmo? O segundo caso significa dizer que, para qualquer x, vale o seguinte: *se* ele for peixe, *então* é azul. Mas um certo x pode, claro, não ser um peixe, e ter outra cor.

De modo análogo, uma sentença como 'nenhum peixe é azul' pode ser parafraseada como 'se algo é um peixe, então *não é* azul', e podemos formalizar isso assim:

$$\forall x(Px \to \neg Ax).$$

Ou seja: para qualquer x, se x é um peixe, então x não é azul. Alternativamente, poderíamos usar

$$\neg\exists x(Px \wedge Ax),$$

ou seja, não existe algo que seja um peixe azul.

Na teoria clássica do silogismo, letras como A e B serviam para propriedades. Mas como o **CQC** também nos permite trabalhar com relações, sentenças que as envolvem também podem ser formalizadas. Por exemplo,

Todos os filhos de João são estudantes.

Esta sentença tem a mesma forma de uma universal afirmativa; veja:

Todo [filho de João] é [estudante].

Se começarmos a formalizar isso, teremos

$$\forall x(x \text{ é filho de João} \to x \text{ é estudante}).$$

Precisamos, agora, apenas de uma constante individual e de constantes de predicado. Por exemplo, j para João, F para 'x é filho de y' e E para 'x é estudante'. Assim:

$$\forall x(Fxj \to Ex).$$

Considere agora um exemplo mais complicado:

Nenhum filho adolescente de João é estudante.

Essa sentença tem a forma 'Nenhum A é B', uma universal negativa:

Nenhum [filho adolescente de João] é [estudante].

Como um início de formalização, temos:

$\forall x$(x é filho adolescente de João $\rightarrow \neg x$ é estudante).

Ou seja:

$\forall x$((x é filho de João $\wedge\, x$ é adolescente) $\rightarrow \neg x$ é estudante).

E, usando A para 'x é adolescente', temos, finalmente:

$$\forall x((Fxj \wedge Ax) \rightarrow \neg Ex).$$

Como você vê, muitas sentenças de estrutura mais complexa podem ser reduzidas a uma das quatro formas básicas de proposição categórica. O quadro seguinte resume o que vimos até agora:

Todo A é B	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$
Nenhum A é B	$\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$
Algum A é B	$\exists x(Ax \wedge Bx)$
Algum A não é B	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

Entretanto, isso é apenas uma pequena parte da história, pois há muitos outros tipos de proposição (ou sentença). Antes de passarmos aos exercícios, porém, um último exemplo. Tomemos a sentença

Os gatos e os cachorros são animais domésticos.

Obviamente, estamos falando de todos os gatos e cachorros. Assim, usando os predicados G, C e A, temos:

$$\forall x((Gx \vee Cx) \rightarrow Ax).$$

Note, agora, uma coisa curiosa: embora na sentença em português tenha aparecido uma conjunção — 'gatos *e* cachorros' —, na fórmula usamos $\vee$. Para perceber a razão disso, compare a fórmula anterior com a seguinte:

$$\forall x((Gx \wedge Cx) \rightarrow Ax).$$

Essa última está dizendo que qualquer coisa que seja *um gato e um cachorro* é um animal doméstico. Mas certamente não existe um indivíduo que seja gato e cachorro ao mesmo tempo. Assim, para exprimir corretamente o que estava em português, precisamos usar a disjunção: qualquer x que seja um gato *ou* que seja um cachorro é um animal doméstico, o que é justamente o que pretendíamos.

Exercício 7.3 Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:

(a) Alguns homens não são sinceros. (H: x é homem; S: x é sincero)
(b) Todas as mulheres são lindas. (M: x é mulher; L: x é linda)
(c) Nenhum peixe é anfíbio. (P: x é peixe; A: x é anfíbio)
(d) Alguns metais são líquidos. (M: x é um metal; S: x é líquido)
(e) Nenhum animal é vegetal. (A: x é um animal; T: x é um vegetal)
(f) Nem todos os animais são invertebrados. (I: x é invertebrado)
(g) Alguns papagaios não são vermelhos. (P: x é um papagaio; R: x é vermelho)
(h) Nenhum papagaio é vermelho.
(i) Há ao menos um papagaio vermelho.
(j) Há ao menos um papagaio, e ao menos uma coisa vermelha.
(k) Alguns números naturais são ímpares. (N: x é um número natural; I: x é ímpar)
(l) Tudo que é azul é bonito. (A: x é azul; B: x é bonito)
(m) Todo poeta é romântico. (P: x é um poeta; R: x é romântico)
(n) Nenhum poeta romântico vende muitos livros. (L: x vende muitos livros)
(o) Qualquer pessoa que seja persistente pode aprender lógica. (P: x é uma pessoa; T: x é persistente; L: x pode aprender lógica)
(p) Há crianças que gostam de brincar. (C: x é criança; G: x gosta de brincar)
(q) Toda criança gosta de brincar.
(r) Toda criança travessa gosta de brincar. (T: x é travessa)

(s) Toda criança travessa gosta de brincar e de ir ao cinema. (K: x gosta de ir ao cinema)
(t) Qualquer amigo de Pedro é amigo de João. (p: Pedro; j: João; A: x é amigo de y)
(u) Nem todos os espiões são mais perigosos do que Boris. (b: Boris; S: x é um espião; D: x é mais perigoso do que y)
(v) Nenhum espião é mais perigoso do que Natasha. (n: Natasha)
(w) Qualquer um que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris.
(x) Nenhum espião que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris.
(y) Alguém é mais perigoso do que Boris e Natasha.
(z) Há um espião que não é mais perigoso do que Boris e nem do que Natasha.

7.3 Quantificação múltipla

Na seção anterior, nos restringimos a formalizar principalmente proposições categóricas, que, como você notou, envolvem apenas um quantificador (existencial ou universal). No entanto, é também comum termos sentenças em que aparecem mais de um quantificador. Já havíamos visto alguns exemplos na seção anterior (como a última sentença do exercício acima). Mas é óbvio que podemos tomar, digamos, duas proposições categóricas quaisquer e fazer sua conjunção (ou disjunção etc.):

Os gatos são pretos, e os cisnes são brancos.

A tradução para a linguagem do **CQC** é óbvia:

$$\forall x(Gx \rightarrow Px) \land \forall x(Cx \rightarrow Bx)$$

Deve estar claro também que você pode tomar quaisquer sentenças gerais e com elas, através de operadores e quantificadores, formar sentenças mais complexas. Por exemplo, considere a sentença

Se todos os gatos são pretos, então não existem gatos cor-de-laranja.

Usando G, P e L para as propriedades envolvidas, teremos:

$$\forall x(Gx \rightarrow Px) \rightarrow \neg\exists x(Gx \wedge Lx),$$

que, claro, não é uma fórmula geral, mas uma implicação. Um outro exemplo:

> Nem todos os gatos são pretos, nem há gatos maiores que Miau que sejam cor-de-laranja.

Usando agora, além do que já tínhamos, M para a relação 'x é maior que y', obtemos

$$\neg\forall x(Gx \rightarrow Px) \wedge \neg\exists x((Gx \wedge Mxm) \wedge Lx).$$

Os casos mais interessantes envolvendo quantificadores, porém, ocorrem quando há mais de um quantificador e um ocorre dentro do escopo do outro. Por exemplo, considere a sentença 'todos gostam de alguém'. Ela pode ser parafraseada do seguinte modo: 'qualquer que seja x, há um y do qual ele gosta', i.e.:

qualquer que seja x, há um y tal que x gosta de y.

Na linguagem do **CQC**, usando G para 'x gosta de y':

$$\forall x\exists yGxy.$$

A propósito, a ordem dos quantificadores é de fundamental importância. A fórmula seguinte, parecida com a anterior, mas com a ordem dos quantificadores invertida, diz algo bem diferente:

$$\exists y\forall xGxy.$$

Isso afirma que existe algum indivíduo, y, tal que, qualquer que seja x, x gosta de y. Em outras palavras (e símbolos), existe algum indivíduo y do qual todos gostam: João gosta de y, Maria gosta de y etc. O que é falso, pois, de modo geral, ninguém é uma unanimidade. Por outro lado, 'todos gostam de alguém' é provavelmente verdadeira: para qualquer pessoa, há alguém de quem ela gosta, e duas pessoas diferentes podem bem gostar de outras pessoas distintas: João gosta

de Maria, Maria gosta de Pedro, Pedro gosta de Etelvina etc. (Basta acrescentar que Carlos também gosta de Etelvina e já teremos material para uma novela!)

Digamos que queremos agora formalizar as sentenças 'há alguém que não gosta de ninguém' e 'há alguém que não gosta de todos'. A primeira fica como se segue:

$$\exists x \forall y \neg Gxy,$$

que diz que há um x tal que, qualquer que seja y, x não gosta de y. Isto é, x não gosta de nenhum y mesmo — não gosta de ninguém. Diferentemente disso, a segunda sentença, que diz que alguém não gosta de todos, é ambígua. Por um lado, ela pode estar significando que há alguém que, embora goste de algumas pessoas, não gosta de todas elas sem exceção. Isto é, temos o seguinte:

$$\exists x \neg \forall y Gxy,$$

ou seja, para algum x, não é verdade que ele goste de todo e qualquer y. Por outro lado, a sentença 'há alguém que não gosta de todos' pode também significar que há alguém que não gosta de qualquer pessoa — ou seja, que não gosta de ninguém. Neste caso, essa sentença diz o mesmo que a primeira acima mencionada, e a fórmula correspondente é a mesma.

Mais um exemplo, neste caso envolvendo três quantificadores: dados três indivíduos quaisquer, se o primeiro é pai do segundo, e o segundo é mãe do terceiro, então o primeiro é avô (materno) do terceiro. Usando P, M, e A para as relações 'x é pai de y', 'x é mãe de y' e 'x é avô materno de y', respectivamente, ficamos com

$$\forall x \forall y \forall z((Pxy \wedge Myz) \rightarrow Axz).$$

E algo ligeiramente parecido: se um indivíduo é avô materno de outro, então há um terceiro de quem o primeiro é o pai, e que é mãe do segundo. Isto é: quaisquer que sejam x e y, se x é avô materno de y, então há um z tal que x é pai de z e z é mãe de y. Ou seja:

$$\forall x \forall y(Axy \rightarrow \exists z(Pxz \wedge Mzy)).$$

Para encerrar, vamos tomar uma sentença bem complicada, e ver como podemos traduzi-la para a linguagem do **CQC**. Digamos que eu peça a você para formalizar a sentença

Todo marciano verde que é rico possui uma casa em Syrtis Major.

Suponhamos também que você deva fazer isso utilizando a seguinte notação:

M: x é um marciano;	C: x é uma casa;
G: x é verde;	S: x fica em Syrtis Major;
R: x é rico;	P: x possui y.

Parece complicado, mas na verdade não é tanto. Para começar, note que estamos tratando de uma proposição categórica — uma universal afirmativa:

Todo [marciano verde que é rico] [possui uma casa em Syrtis Major],

ou seja, o resultado final terá que ter a seguinte estrutura:

$$\forall x(x \text{ é marciano, verde e rico} \rightarrow x \text{ possui uma casa em Syrtis Major}). \quad (6)$$

A primeira parte é fácil, pois 'x é marciano, verde e rico' equivale a 'x é marciano e x é verde e x é rico'. Em símbolos: '$Mx \wedge (Gx \wedge Rx)$'. Podemos substituir isso em (6), ficando com:

$$\forall x((Mx \wedge (Gx \wedge Rx)) \rightarrow x \text{ possui uma casa em Syrtis Major}). \quad (7)$$

Mas como vamos agora representar 'x possui uma casa em Syrtis Major'? A resposta é mais ou menos imediata:

há um y, tal que y é uma casa, y fica em Syrtis Major, e x possui y.

Ou seja: $\exists y(Cy \wedge (Sy \wedge Pxy))$. Substituindo isso em (7), temos a solução:

$$\forall x((Mx \wedge (Gx \wedge Rx)) \rightarrow \exists y(Cy \wedge (Sy \wedge Pxy))).$$

Não é uma beleza? E agora, divirta-se com os exercícios abaixo. (Afinal, o que você faria nas tardes de sábado se não houvesse exercícios de lógica, não é mesmo?)

Exercício 7.4 Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:
m: Miau; G: *x* gosta de *y*; A: *x* ama *y*.

(a) Todos amam alguém.
(b) Alguém ama alguém.
(c) Todos são amados por alguém.
(d) Alguém é amado por todos.
(e) Todos são amados por todos.
(f) Alguém não ama todos.
(g) Alguém não é amado por todos.
(h) Se todos gostam de Miau, Miau gosta de todos.
(i) Alguém gosta de alguém, se Miau gosta de todos.
(j) Todos gostam de Miau, mas Miau não gosta de ninguém.
(k) Todos amam alguém que não os ama.
(l) Todos amam alguém que não ama ninguém.
(m) Todos amam alguém, mas ninguém ama a todos.
(n) Ou alguém é amado por todos, ou alguém ama todos e alguém não ama ninguém.

Exercício 7.5 Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:

(a) Nenhum amigo de Pedro é amigo de João. (*p*: Pedro; *j*: João; A: *x* é amigo de *y*)
(b) Qualquer amigo de Pedro que não seja um político é amigo de João. (*P*: *x* é um político)
(c) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de João. (*c*: Carlos)
(d) Qualquer amigo de Pedro é amigo de algum amigo de João.
(e) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de qualquer amigo de João.
(f) Nenhuma mulher é feia, mas algumas mulheres não são bonitas. (M: *x* é uma mulher; *F*: *x* é feia; *B*: *x* é bonita)
(g) Se todos os humanos são imortais, então Sócrates é imortal ou Sócrates não é humano. (*s*: Sócrates; *H*: *x* é humano; *I*: *x* é imortal)
(h) Nem todas as aves voam, se Tweety não voa. (*t*: Tweety; A: *x* é uma ave; *F*: *x* voa)
(i) Todo fazendeiro tem um burro no qual ele bate. (*F*: *x* é um fazendeiro; *B*: *x* é um burro; *T*: *x* pertence a *y*; *H*: *x* bate em *y*)

(j) Algum fazendeiro tem um burro no qual ele não bate.
(k) Todo homem ama uma mulher que o ama. (H: x é um homem; M: x é uma mulher; A: x ama y)
(l) Nem todo homem ama uma mulher que o ama.
(m) Todo homem ama uma mulher que ama alguém.
(n) Se todos os filósofos espertos são cínicos e apenas mulheres são filósofos espertos, então, se há algum filósofo esperto, alguma mulher é cínica. (F: x é um filósofo; M: x é uma mulher; E: x é esperto; C: x é cínico)

Exercício 7.6 Traduza as sentenças abaixo (algumas são um pouco complicadas!) para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:
a: Alice; b: Beatriz; c: Cláudia; L: x é um livro; P: x é um psicólogo; F: x é um filósofo; G: x gosta de y; D: x dá y para z.

(a) Alice gosta de algum filósofo que gosta dela.
(b) Todo filósofo gosta de algum livro.
(c) Há um livro do qual todos os filósofos gostam.
(d) Os filósofos gostam de todos os livros.
(e) Há um livro do qual nenhum psicólogo gosta.
(f) Nenhum psicólogo gosta de livros.
(g) Filósofos não gostam de psicólogos.
(h) Um filósofo deu um livro para Alice.
(i) Um filósofo deu um livro para Alice, do qual ela não gostou.
(j) Alice e Beatriz deram um livro para Cláudia.
(k) Um filósofo e um psicólogo deram um livro para Beatriz.
(l) Nem os filósofos nem os psicólogos gostam de si mesmos.
(m) Se algum psicólogo gosta de Beatriz, então algum filósofo também gosta.
(n) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo gosta desta mesma pessoa.
(o) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo também gosta de alguém.
(p) Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou não gostam de nenhum.
(q) Alice e Beatriz gostam de todos os filósofos, se algum filósofo dá algum livro para alguém.
(r) Todos gostam dos filósofos, se todo filósofo dá algum livro para alguém.

CAPÍTULO 8

INTERPRETAÇÕES

Com este capítulo vamos iniciar uma parte relativa à semântica do **CQC**. Este capítulo pretende apenas apresentar as idéias básicas que norteiam a construção de interpretações para linguagens artificiais, e a definição de verdade para suas fórmulas. Nos capítulos seguintes veremos, em duas etapas, como levar a cabo essa construção.

8.1 Significado e verdade

Como você se recorda, durante nossa discussão inicial vimos que um dos objetivos da lógica é a determinação da validade ou invalidade de argumentos ou inferências, ou seja, procura-se determinar em que condições uma certa proposição (ou sentença) é conseqüência lógica de um conjunto dado de proposições (ou sentenças). Nos capítulos subseqüentes, você teve contato com uma linguagem artificial, a linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem, e viu como traduzir sentenças simples do português para ela. A idéia principal que está por trás do uso de uma linguagem artificial $\mathcal{L}$ é a de tomar um argumento em português, traduzi-lo para $\mathcal{L}$ e então procurar mostrar sua validade (ou invalidade, se for o caso), analisando o conjunto de fórmulas resultante desse processo de tradução. Como um argumento é (intuitivamente) válido se não é possível que suas premissas sejam verdadeiras e que, ao mesmo tempo, sua conclusão

seja falsa, para poder investigar a validade desse argumento precisamos dizer em que condições certas fórmulas são verdadeiras ou falsas, uma vez que premissas e conclusão são agora fórmulas em uma linguagem de primeira ordem. Note que isso só é possível se *interpretarmos* uma fórmula dada, isto é, se dermos a ela (e a suas componentes) algum tipo de *significado*.

Para ilustrar esse ponto, considere o seguinte exemplo. Se você não sabe absolutamente nada de alemão, você não terá condições de dizer se a sentença

Tübingen ist eine schöne Stadt

é verdadeira ou falsa, pois você não sabe o que essas palavras significam. A mesma observação aplica-se a fórmulas de uma linguagem artificial. Se dermos uma interpretação a uma fórmula, poderemos então determinar se essa fórmula, *segundo essa interpretação*, é verdadeira ou falsa. Como você vê, precisamos nos ocupar da *semântica* das linguagens de primeira ordem, pois é a semântica que trata do significado das expressões lingüísticas.

Essa interpretação de que precisamos, contudo, não é feita para uma fórmula isoladamente, mas para todos os símbolos da linguagem de primeira ordem que estivermos utilizando. No caso da sentença acima, precisamos dizer, em primeiro lugar, o que as palavras significam. Depois, precisamos dizer também como é que o significado da sentença é obtido a partir do significado das palavras que a compõem.

No caso de uma linguagem de primeira ordem — que inclui todos os símbolos lógicos e mais alguns símbolos não-lógicos —, os símbolos lógicos já têm um “significado fixo”: $\neg$ é ‘não’, $\vee$ é ‘ou’, e assim por diante. Essa é a interpretação que tínhamos para esses sinais, que faz com que tenhamos um sistema de lógica, e não alguma outra coisa. Note que poderíamos interpretar os símbolos lógicos de qualquer maneira: por exemplo, poderíamos dizer que $\forall$ é um outro nome para Sócrates. Mas aí não teríamos mais um sistema de lógica. Resumindo, o que faz com que uma linguagem artificial qualquer seja uma linguagem da lógica é o significado fixo que atribuímos a certos símbolos: os símbolos lógicos.

Agora, se os símbolos lógicos têm um significado fixo, precisamos apenas encontrar os significados dos símbolos não-lógicos. É claro

que, ao especificarmos uma linguagem de primeira ordem — ou seja, ao escolhermos os símbolos não-lógicos que farão parte dela —, usualmente, já temos em vista um certo domínio de aplicação (um conjunto de argumentos cuja validade pretendemos determinar, uma certa teoria que pretendemos formalizar etc.), e os símbolos serão escolhidos já com um certo significado informal a eles associado. Por exemplo: suponhamos que você queira determinar a validade do argumento

P1 Todo planeta joviano tem anéis.
P2 Netuno é um planeta joviano.
▶ Netuno tem anéis.

Para isso, você pode traduzir argumento para uma linguagem de primeira ordem, usando J para representar a propriedade 'x é um planeta joviano', A para 'x tem anéis', e n para 'Netuno'. O resultado é o seguinte:

P1 $\forall x(Jx \to Ax)$
P2 Jn
▶ An

Os símbolos que ocorrem no conjunto de fórmulas acima, de certa forma, já têm um significado — que vou chamar de uma "interpretação informal" — e que corresponde exatamente ao que foi feito: J significa 'x é um planeta joviano' etc. Ora, para verificar se Jn é verdadeira, basta conferir se, no mundo real, Netuno é um planeta joviano,[1] ou não. De modo similar para An e, obviamente, $\forall x(Jx \to Ax)$ será verdadeira se todos os planetas jovianos de fato tiverem anéis.

Entretanto, essa maneira informal de dar significado às fórmulas e determinar sua verdade não é suficiente para os nossos interesses ao fazer lógica — tais como tentar determinar a validade do argumento acima. Lembre-se, antes de mais nada, de nossa caracterização informal de argumento válido: aquele do qual não é possível que as premissas sejam verdadeiras e, ao mesmo tempo, a conclusão falsa.

[1] Com certeza, você sabe o que são planetas jovianos — gigantes gasosos, como Júpiter (ou Jove — daí o nome).

Um primeiro problema quanto a isso é que tentar determinar a verdade de uma fórmula dessa maneira — verificando o que acontece na realidade — costuma, na prática, ser extremamente difícil, e muitas vezes até impossível. Como você vai garantir que todo planeta joviano tem anéis? Poucos anos atrás ainda se acreditava no contrário, isto é, que Saturno era o único planeta com anéis no sistema solar. Agora sabemos que isso não é verdade.

De mais a mais, é muito comum que raciocinemos a partir de hipóteses: proposições de cuja verdade não temos certeza alguma e, muitas vezes, até sabemos serem falsas (em situações do tipo "suponhamos que eu fizesse isto ou aquilo: quais seriam as conseqüências?").

No caso acima, P_2 é verdadeira, e P_1 é provavelmente verdadeira, uma vez que todos os planetas jovianos do sistema solar têm anéis. Contudo, nada sabemos a respeito de outros sistemas solares. E, mesmo sendo P_1 verdadeira, será que a conclusão também teria de ser, necessariamente, verdadeira? Note que não temos condições de responder a isso olhando apenas para o mundo real. Não seria possível, assim, imaginar uma situação na qual as premissas fossem verdadeiras e a conclusão, falsa?

Para início de conversa, é bastante simples imaginar situações nas quais uma das proposições envolvidas no argumento, ou até mais de uma, sejam falsas. Temos duas maneiras de fazer isso:

- Podemos imaginar que Saturno, por exemplo, não tivesse anéis. Nesse caso, seria falso que todos os planetas jovianos têm anéis. Ou seja, P_1 seria falsa *se o universo fosse diferente*.
- Alternativamente, podemos imaginar que a palavra 'anel', em vez de ter o sentido que tem em português, significasse 'asa'. Nesse caso, P_1 estaria, de fato, querendo dizer que todos os planetas jovianos têm asas — o que seria, mais uma vez, falso. Ou seja, P_1 seria falsa *se 'anel' tivesse um significado diferente*.

Note, portanto, que a verdade de uma sentença parece depender de duas coisas: do significado das palavras e da realidade. Para atender a nossos propósitos enquanto lógicos, deveríamos, em princípio, imaginar todos os modos em que a realidade pudesse ser diferente,

ou em que as palavras significassem outras coisas diferentes do que realmente significam. Aí então estaríamos examinando todos os casos possíveis, e verificando, em cada um deles, se temos premissas verdadeiras e conclusão falsa.

A questão toda tem a ver com o fato, mencionado na introdução, de que a lógica não procura determinar se as premissas e a conclusão de um argumento são, *de fato*, verdadeiras. A única coisa que interessa é: se as premissas *fossem* verdadeiras, a conclusão também *seria*? Por conseguinte, precisamos de alguma coisa que nos permita interpretar fórmulas e determinar sua verdade ou falsidade *em todos os casos possíveis*, e não apenas com relação aos fatos, ao mundo real. Essa coisa de que necessitamos é uma *interpretação formal*, ao invés daquela maneira informal de atribuir significados que vimos acima. Uma interpretação formal para uma linguagem $\mathcal{L}$ qualquer, como veremos, é feita utilizando-se ferramentas da teoria de conjuntos (e é por isso que você passou um capítulo inteiro revendo conjuntos).

Exercício 8.1 Com relação ao argumento apresentado anteriormente a respeito de Netuno, tente imaginar uma situação em que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão, falsa. Isso é possível? Por quê?

8.2 Idéias básicas

Uma suposição inicial que fazemos na semântica para o **CQC**, sendo ele parte da lógica clássica, é de que existem dois objetos chamados *valores de verdade*: *verdadeiro* e *falso*. Esses valores de verdade são simplesmente dois objetos quaisquer, desde que sejam distintos: poderíamos usar 1 e 0, ou o Sol e a Lua, ou Cameron Díaz e Salma Hayek. O importante é que possamos distinguir um do outro. Usaremos o símbolo '**V**' para indicar *verdadeiro*, e '**F**' para indicar *falso*.

Uma suposição adicional é o chamado *Princípio de Bivalência*, que diz que toda proposição (ou sentença) é ou verdadeira, ou falsa. Isso significa que a toda proposição deverá ser associado um, e apenas um, dos valores de verdade. (Uma proposição, portanto, não pode deixar de ter um valor, nem ter mais de um valor associado a ela.) Assim, dada uma interpretação, uma proposição terá o valor **V** segundo essa interpretação, ou terá o valor **F**.

Além do princípio de bivalência, uma das características básicas da semântica para o **CQC** é que ela é uma *semântica de condições de verdade*. Isso quer dizer, resumidamente, que especificar o significado de uma sentença declarativa consiste em dizer como o mundo deve ser para que ela seja verdadeira, ou seja, especificar suas condições de verdade. Tomemos, por exemplo, a sentença

A Lua gira em torno da Terra.

Essa sentença será verdadeira se existirem, no universo, dois objetos, que estamos chamando de 'Lua' e 'Terra', tais que o primeiro deles tem uma órbita em torno do segundo.

Voltemos ao exemplo da seção anterior a respeito de Tübingen. Poderíamos indicar o significado dessa sentença por meio de suas condições de verdade, dizendo:

'Tübingen ist eine schöne Stadt' é verdadeira
sse Tübingen é uma linda cidade.

Note que, com isso, especificamos as condições em que a sentença em alemão é verdadeira. E, claro, você fica sabendo imediatamente o significado dessa sentença: que Tübingen é uma linda cidade. (A propósito, 'sse' é uma abreviatura, na metalinguagem, de 'se e somente se'.)

É claro que essa idéia de condições de verdade só pode aplicar-se a sentenças declarativas: não faz sentido perguntar em que condições as palavras 'gato' ou 'Netuno' são verdadeiras, por exemplo. Palavras como 'gato', 'planeta' etc. costumam ter seu significado especificado de outra forma (ver capítulo 10).

Um problema, contudo, coloca-se a respeito dessa maneira de ver as coisas: se dar o significado de uma sentença é especificar suas condições de verdade, e se temos infinitas sentenças (igualmente, infinitas fórmulas em uma linguagem artificial), como é que vamos fazer essa especificação?

A resposta é dada por uma outra característica marcante da semântica do **CQC**, que é o chamado *Princípio da Composicionalidade*, ou *Princípio de Frege*: o significado de uma expressão complexa é uma função do significado de suas partes e do modo como elas se combinam. Isso é o que eu quis dizer na seção anterior, ao afirmar que

o significado de uma sentença depende do significado das palavras envolvidas, e do modo como elas estão arranjadas na sentença. Para dar um exemplo, considere as sentenças abaixo:

O cachorro mordeu o homem,

O homem mordeu o cachorro.

Ainda que as palavras sejam as mesmas nas duas sentenças, estas têm significados diferentes, claro, pois a ordem em que as palavras ocorrem é diferente em cada caso.

A idéia por trás desse princípio é fazer uma ligação bastante estreita entre a sintaxe e a semântica de uma linguagem artificial. Como você recorda, as fórmulas são construídas, basicamente, a partir de fórmulas atômicas, utilizando-se os operadores e quantificadores. As fórmulas atômicas, por sua vez, são construídas a partir de constantes de predicado e termos (constantes ou variáveis individuais). Assim, o que precisamos fazer é, primeiro, especificar quais são as condições de verdade para as fórmulas atômicas — que devem ser obtidas, claro, levando-se em conta o significado que será atribuído a seus componentes: às constantes de predicado e aos termos individuais. A partir daí, deveremos especificar como obter o significado de uma fórmula molecular — por exemplo, $\neg\alpha$ — a partir do significado (condições de verdade) de α.

Vamos ilustrar isso através de um exemplo, tomando duas sentenças como, digamos, 'Claudia Schiffer é uma mulher' e 'Claudia Schiffer é ruiva'. Essas sentenças podem ser formalizadas numa linguagem de primeira ordem, utilizando M e R como símbolos de propriedades ('x é uma mulher', 'x é ruiva'), e c como uma constante individual ('Claudia Schiffer'). O resultado são as fórmulas Mc e Rc.

O primeiro passo seria especificar as condições de verdade para essas duas fórmulas. Por analogia ao exemplo anterior a respeito de Tübingen, temos:

'Mc' é verdadeira sse Claudia Schiffer é uma mulher;

'Rc' é verdadeira sse Claudia Schiffer é ruiva.

Agora, como Claudia Schiffer é, de fato, uma mulher, podemos dizer que, em relação ao mundo real, Mc é uma fórmula *verdadeira*.

Isso pode ser parafraseado, como vimos, dizendo que a essa fórmula é atribuído um certo valor de verdade: *verdadeiro*. Assim, dizer que Mc é verdadeira é dizer, simplesmente, que Mc recebe o valor de verdade **V**.

Qual seria, agora, o valor de ¬Mc, já que Mc é verdadeira? Olhando as coisas intuitivamente, se é verdade que Claudia Schiffer é uma mulher, então é falso dizer que ela não o é. Nesse caso, uma vez que Mc é verdadeira, ¬Mc deve ser considerada *falsa*. Ou seja, ¬Mc recebe o valor **F**.

Vejamos, agora, a fórmula *Rc*: uma vez que Claudia Schiffer é loura, e não ruiva, essa fórmula recebe o valor **F** no mundo real. Qual você acha que é então o valor de ¬*Rc*? Simples: se é falso que Claudia Schiffer é ruiva, então deve ser verdade que ela não é ruiva. Ou seja, ¬*Rc* é *verdadeira*.

Como você vê pelos exemplos acima, o valor de uma fórmula negativa $\neg\alpha$ qualquer pode ser *calculado* a partir do valor da fórmula (mais simples) α que está sendo negada. A idéia geral, e que veremos em detalhes no próximo capítulo, pode ser resumida com a seguinte afirmação:

> O valor de verdade de uma fórmula molecular pode ser calculado a partir dos valores de seus componentes mais simples.

No caso de uma negação, a regra de cálculo diz simplesmente que o valor da fórmula negativa deve ser o oposto da fórmula que está sendo negada: se α tem **V**, $\neg\alpha$ tem **F**; se α tem **F**, $\neg\alpha$ tem **V**.

Vamos ver mais um exemplo para esclarecer isso tudo. Considere a conjunção $Mc \wedge Rc$, que, de acordo com nossa interpretação informal dos símbolos envolvidos, diz que Claudia Schiffer é uma mulher ruiva. Ora, essa fórmula é verdadeira se for verdade que Claudia Schiffer é uma mulher *e que* Claudia Schiffer é ruiva. Assim, para saber se $Mc \wedge Rc$ tem o valor **V**, ou não, precisamos primeiro verificar se Mc é verdadeira, e se *Rc* é verdadeira. Como vimos, Mc é, de fato, verdadeira, mas *Rc*, não. Uma vez que, ao afirmar uma conjunção, estamos afirmando as duas proposições que a compõem, se uma delas é falsa não pode ser verdade que ambas sejam verdadeiras. Portanto, a fórmula $Mc \wedge Rc$ é falsa. Obviamente, se tivéssemos um predicado *L* na linguagem, representando a propriedade '*x* é loura', a conjunção

$Mc \wedge Lc$ teria o valor **V**, pois é tanto verdade que Claudia Schiffer é uma mulher, quanto que ela é loura.

Como você viu pelos exemplos acima, a partir do valor de verdade das fórmulas atômicas, poderemos especificar as condições em que as fórmulas moleculares (e, como veremos depois, também as gerais) são verdadeiras. Tudo depende dos valores das fórmulas atômicas. Veremos depois como obtê-los.

No capítulo seguinte, vamos ver como é que se calcula o valor de uma fórmula molecular a partir dos valores de seus componentes (ou componente, em se tratando de uma negação). As interpretações que veremos nele, portanto, vão ser bem restritas. Mais tarde veremos como tratar do resto.

CAPÍTULO 9

VALORAÇÕES

Neste capítulo vamos começar a ver com mais detalhes a semântica para as nossas linguagens artificiais, investigando um tipo muito simples de interpretação, as interpretações proposicionais, ou *valorações*. Apesar de simples, tais interpretações já nos dão elementos suficientes para determinar o valor de verdade de fórmulas moleculares e, a partir disso, definir uma primeira noção de conseqüência lógica, que funciona para uma parte do **CQC** denominada *lógica proposicional*.

9.1 Lógica proposicional

As interpretações que vamos examinar neste capítulo não são para linguagens de primeira ordem, mas para subconjuntos dessas linguagens, chamados *linguagens proposicionais*. Essas linguagens compreendem apenas letras sentenciais (isto é, símbolos de predicados zero-ários), operadores, e parênteses. Ficam de fora as constantes e variáveis individuais, os quantificadores e qualquer símbolo de propriedade ou relação. Como você vê, uma linguagem proposicional é bem mais restrita. Uma definição mais precisa de linguagens proposicionais (ou linguagens de ordem zero) é a seguinte:

Definição 9.1 *Uma linguagem proposicional é um subconjunto da linguagem geral do* **CQC** *que contém apenas os símbolos dos operadores, os*

parênteses, e na qual todas as constantes de predicado (das quais há ao menos uma) são letras sentenciais.

O *cálculo proposicional clássico*, **CPC**, ou simplesmente *lógica proposicional*, é uma parte do **CQC** caracterizada pelo uso de linguagens proposicionais. Dito de outra forma, o **CPC** engloba aquelas formas de argumento cuja validade pode ser mostrada já em uma linguagem proposicional.

Contudo, ainda que as linguagens proposicionais sejam mais restritas que as linguagens de primeira ordem, há muitas formas de argumento que são proposicionalmente válidas. Considere os dois exemplos abaixo:

P_1	Se é dia, então há luz.	P_1	Se todos os gatos são pretos, Miau é preto.
P_2	É dia.	P_2	Todos os gatos são pretos.
▶	Há luz.	▶	Miau é preto.

O primeiro dos argumentos acima pode ser formalizado (isto é, transcrito para uma linguagem artificial) simplesmente da seguinte maneira:

P_1 $A \rightarrow B$
P_2 A
▶ B

Porém, nada nos impede de formalizar o segundo igualmente da mesma forma, com *A* significando 'Todos os gatos são pretos' e *B* significando 'Miau é preto'. O segundo argumento pode ser formalizado, é claro, de um modo mais detalhado, como segue:

P_1 $\forall x(Gx \rightarrow Px) \rightarrow Pm$
P_2 $\forall x(Gx \rightarrow Px)$
▶ Pm

Isso, contudo, não é necessário para mostrar sua validade. Ou seja, os dois argumentos, no final das contas, têm a mesma forma: há uma premissa que é um condicional, e uma outra que afirma o antecedente desse condicional. A conclusão é o conseqüente do condicional.

Essa forma de argumento, a propósito, é chamada de *Afirmação do Antecedente*, ou ainda *Modus Ponens*.

Resumindo, então, há muitas formas válidas de argumento que se podem adequadamente representar fazendo uso simplesmente de linguagens proposicionais. Claro que tais linguagens não são suficientes para representar muitas outras formas (se fossem, não precisaríamos talvez do **CQC**). Note que, do ponto de vista proposicional, temos então apenas dois tipos de fórmula:

- fórmulas atômicas (letras sentenciais), como A, B, C etc.
- fórmulas moleculares, como $A \wedge B$, $\neg(C \rightarrow D)$, $A \vee E$ etc.

9.2 Funções de verdade

Voltando, agora, a falar de semântica, que é o que nos interessa no momento, temos a considerar o seguinte: as interpretações que vamos ver neste capítulo nos dão condições de calcular apenas o valor de fórmulas moleculares a partir de suas subfórmulas imediatas. Assim, o que precisamos é determinar, primeiro, qual o valor dessas subfórmulas. Obviamente, se uma subfórmula imediata for *outra* fórmula molecular, a pergunta se repete com relação às subfórmulas imediatas desta, e assim sucessivamente. Mas o que acontece, afinal, quando chegamos a uma fórmula atômica (isto é, uma letra sentencial)? De onde tiramos os valores destas?

De novo, um exemplo. Tomemos a conjunção $A \wedge B$. Para saber seu valor de verdade, precisaríamos primeiro dos valores de A e de B: mas como obtê-los? Bem, o que importa é que, seja lá qual for a situação, sejam lá quais forem as proposições que A e B estejam representando, A e B são, obviamente, ou verdadeiras ou falsas. Isto é, elas têm ou o valor de verdade **V**, ou o valor **F**.[1] Assim, digamos que temos alguma interpretação em que A e B são verdadeiras; neste caso, podemos dizer que a conjunção $A \wedge B$, relativamente a essa interpretação, é verdadeira, uma vez que seus dois elementos o são.

[1]Conforme indicado no capítulo anterior, veremos mais tarde como especificar as condições de verdade para as demais fórmulas atômicas.

A razão pela qual podemos calcular o valor de uma fórmula molecular a partir dos valores de suas subfórmulas é que os operadores do **CQC** são *funções de verdade*. Você está acostumado a lidar com funções numéricas, como a soma, em virtude de ter estudado aritmética na escola. A soma é uma função numérica porque toma dois números como argumentos e associa a eles um terceiro número, que corresponde à soma dos dois. Assim, aos números 2 e 5, a função soma associa o número 7. Aos números 4 e 5, a soma associa 9.

Funções de verdade são parecidas: são funções que tomam como argumentos valores de verdade e associam a estes um outro valor de verdade. Vamos ver como é isso, examinando os operadores caso a caso.

9.2.1 Negação

Suponhamos que temos uma sentença como 'Pedro é músico', representada aqui simplesmente pela letra sentencial A, que sabemos ser verdadeira. Qual seria o valor de sua negação, isto é, 'Pedro não é músico'? Como vimos no exemplo do capítulo anterior, que falava (mais uma vez) a respeito de Claudia Schiffer, se A tem o valor **V**, $\neg A$ recebe o valor **F**. Do mesmo modo, caso A tenha o valor **F**, sua negação recebe **V**.

Essa propriedade da negação pode ser resumida na seguinte tabelinha, que deve lembrar a você a tabuada da escola primária. É basicamente a mesma coisa, apenas aqui estamos trabalhando com valores de verdade, e não com números.

α	$\neg\alpha$
V	**F**
F	**V**

Explicando: na primeira coluna da tabela, temos uma fórmula α qualquer, que pode ser verdadeira ou falsa. Essas duas possibilidades são representadas pelas duas linhas na tabela. Na primeira, supomos que α tem o valor **V**; na segunda, que tem **F**. Na segunda coluna, temos, para cada linha, o valor correspondente de $\neg\alpha$. Quando α

tem **V**, isto é, como na linha 1, $\neg\alpha$ tem **F**. Quando α tem **F**, como na linha 2, $\neg\alpha$ tem **V**.

É claro que isso permite calcular o valor de fórmulas ainda mais complicadas. Por exemplo, sabendo que B é verdadeira, qual seria o valor de $\neg\neg B$? Bem, se B tem **V**, $\neg B$ tem obviamente **F**. Segue-se que a negação de $\neg B$, que é $\neg\neg B$, terá **V**. Simples, não é?

9.2.2 Conjunção

Como mencionado anteriormente, quando afirmamos uma conjunção $\alpha \wedge \beta$ estamos pretendendo dizer que as duas fórmulas, α e β, são verdadeiras. Se uma delas for falsa, então não diríamos que $\alpha \wedge \beta$ é verdadeira. Isso é resumido na seguinte tabela:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**F**	**F**

No caso, temos, agora, uma tabela com quatro linhas. Por quê? Ora, isso corresponde às quatro combinações possíveis de valores que duas fórmulas α e β quaisquer podem ter: ambas verdadeiras (na primeira linha), ambas falsas (na quarta linha), ou, alternadamente, uma verdadeira e a outra falsa (segunda e terceira linhas). No caso da negação, que é uma função de verdade de um argumento, temos apenas duas linhas: o argumento — uma fórmula α qualquer — é verdadeiro, ou falso. A conjunção, contudo, é uma função de verdade de dois argumentos. Assim, temos que considerar os quatro casos possíveis, e dizer que valor a conjunção leva em cada um deles.

Uma questão interessante, que se coloca neste momento, diz respeito à correspondência (ou não) desse sentido "lógico" da conjunção, e do 'e' em português. Podemos, em princípio, dizer que essa análise da conjunção (apresentada na tabelinha acima) se aproxima muito do nosso sentido intuitivo de conjunção. Contudo, alguns cuidados devem ser tomados. Considere, por exemplo, a sentença abaixo:

João pulou do edifício e morreu. (1)

Com certeza, estamos afirmando duas proposições atômicas: que João pulou do edifício, e que João morreu. Isso pode ser representado em uma linguagem proposicional por uma fórmula como $A \wedge B$. Contudo, é fácil ver que, se $A \wedge B$ é verdadeira, a fórmula $B \wedge A$ também o é. E esta, retraduzida, diz o seguinte:

João morreu e pulou do edifício. (2)

Ora, em uma leitura, a sentença (2) acima é verdadeira: é tanto verdade que João morreu, quanto que pulou do edifício. Mas a interpretação usual de (1), e também de (2), é que há uma conexão *temporal* entre A e B: João pulou do edifício, *e então* João morreu. Nessa segunda leitura, é claro que (1) é verdadeira, mas (2) é falsa.

A moral da história é que a conjunção, como definida pela tabela apresentada anteriormente, é uma "pasteurização", digamos, da conjunção (ou das conjunções) que temos em uma linguagem natural como o português. Algo similar ocorre com 'mas', que também é formalizado usando-se $\wedge$. Nesse caso, as duas sentenças abaixo, cujo sentido é diferente em português,

Pedro é inteligente e preguiçoso,

Pedro é inteligente, mas preguiçoso,

seriam formalizadas como, digamos, $Ip \wedge Pp$ — ou $A \wedge B$ numa linguagem proposicional. Em ambos os casos, estamos, de fato, afirmando duas proposições: que Pedro é inteligente e que ele é preguiçoso. As nuances de sentido que distinguem 'mas' de 'e' ficam, feliz ou infelizmente, perdidas.

9.2.3 Disjunção

A disjunção, como você recorda, corresponde a 'ou' em português. Mas, em português, existem dois sentidos diferentes de 'ou': um exclusivo e um inclusivo. O sentido inclusivo é aquele de 'e/ou', isto é, temos uma possibilidade, ou a outra ou, eventualmente, as duas coisas. Por exemplo, podemos dizer que ou chove ou faz sol: normalmente temos uma coisa, ou a outra — mas, às vezes, acontece

de termos as duas coisas ao mesmo tempo (nos casamentos de viúva, como se costuma dizer).

Por outro lado, existe um outro sentido da disjunção, o exclusivo, que representa uma alternação legítima: ou uma coisa, ou a outra, mas não as duas. Por exemplo, ou João será eleito prefeito de Florianópolis, ou José será eleito. Obviamente, não pode acontecer que os dois sejam eleitos ao mesmo tempo: as alternativas se excluem mutuamente.

Na interpretação inclusiva, uma disjunção é verdadeira se um dos disjuntos o for, ou, eventualmente, se os dois forem. Já no caso da disjunção exclusiva, se os dois disjuntos forem verdadeiros, a disjunção será falsa. Assim, o que ocorre é que temos duas funções de verdade correspondentes à disjunção. Contudo, no **CQC**, o operador $\vee$ é costumeiramente usado para representar a disjunção *inclusiva*, que é caracterizada pela seguinte tabela:

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**F**	**F**

Como você vê, na primeira linha, em que tanto α quanto β são verdadeiras, a disjunção $\alpha \vee \beta$ também é verdadeira. Uma disjunção só será falsa se os dois disjuntos forem falsos.

Uma tabela para uma disjunção exclusiva, a propósito, seria igual àquela apresentada acima, apenas trocando **V** por **F** na primeira linha. Isto é, se α e β são verdadeiras, $\alpha \vee \beta$ recebe **F**.

Com relação aos problemas de tradução, note que, pelo sentido da disjunção que foi definido pela tabela apresentada, uma sentença como

A Terra é um planeta ou Beethoven é italiano

é considerada verdadeira, ainda que, intuitivamente, não consideramos haver uma alternativa legítima entre as sentenças 'A Terra é um planeta' e 'Beethoven é italiano', pois uma coisa não tem nada a ver com a outra.

9.2.4 Implicação material

Vamos, agora, examinar a tabela de verdade para $\rightarrow$, nossa implicação material. Aqui, você tem que prestar bastante atenção, pois as coisas são um pouco complicadas.

A discussão sobre a verdade de um condicional é antiga. Para falar a verdade, desde a Grécia, e há muitas opiniões divergentes — começando por filósofos como Diodoro Cronus (séc. IV a. C.) e seu discípulo, Philo de Mégara. Todo mundo parece concordar, para início de conversa, que, se o antecedente de uma implicação for verdadeiro, e o conseqüente falso, então a implicação, como um todo, será falsa.

Porém, o que dizer dos outros casos? Suponhamos que α e β sejam verdadeiras: o que concluir a respeito do valor de $\alpha \rightarrow \beta$? Pode ser que α implique β, e pode ser que não. O que fazer?

A lógica clássica, seguindo inclusive a análise dos condicionais feita por Philo, toma uma decisão radical: fora o caso visto acima, em que uma implicação é falsa, em todos os outros, ela será verdadeira; conforme a tabela abaixo:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**F**	**V**

Você há de concordar que esta é uma situação muito esquisita. Por exemplo, nessa análise uma sentença como 'Se $2+2=5$ então a Lua é feita de queijo' é uma implicação verdadeira. Mas, certamente, não estamos dispostos a concordar que $2+2=5$ implica que a Lua é feita de queijo, pois uma coisa não tem nada a ver com a outra.[2] De modo análogo, os dois condicionais seguintes são considerados verdadeiros:

(i) Se o califa Omar não queimou a Biblioteca de Alexandria, então alguma outra pessoa o fez.

[2] Há algumas situações, contudo, em que afirmamos tranqüilamente condicionais em que o antecedente nada tem a ver com o conseqüente. Por exemplo, 'se isto é uma obra de arte, então sou um mico de circo'. Isso, porém, é apenas uma outra maneira de afirmar 'isto *não* é uma obra de arte'.

(ii) Se o califa Omar não tivesse queimado a Biblioteca de Alexandria, então alguma outra pessoa o teria feito.

Contudo, intuitivamente, o primeiro é verdadeiro, enquanto o segundo é considerado falso. Condicionais como estes são chamados de *contrafactuais*, pois seus antecedentes são falsos em virtude dos fatos (eles afirmam algo contra os fatos). Porém, pela tabela de verdade acima, qualquer condicional com antecedente falso é verdadeiro.

O problema todo com relação à implicação é que existem vários tipos de condicional em português. A expressão 'se... então...' é usada para exprimir várias relações de dependência entre proposições, mas a maioria delas não é adequadamente reproduzida pela interpretação dada pelo **CQC** para $\rightarrow$. A razão de a lógica clássica ter escolhido o caminho que escolheu é que essa análise do condicional, diz-se, é adequada para trabalhar na matemática. Como os iniciadores da lógica contemporânea eram, em sua maioria, matemáticos, eles acharam que tal análise era suficiente. (É a análise mais simples que se pode fazer, na verdade.) Mas essa maneira de representar a implicação, realmente, deixa muito a desejar. Como veremos no final deste livro, existem tentativas diferentes de formalizar uma implicação mais sensata, começando com lógicas modais, mas, principalmente, por meio de lógicas relevantes. Mas isso é um assunto para mais tarde. Por enquanto, você tem que se conformar com a tabelinha acima.

Talvez ajude a entender isso se você pensar em $\alpha \rightarrow \beta$ como apenas uma maneira mais simples de dizer $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. Isto, afinal, é o que diz a tabela de verdade: temos $\alpha \rightarrow \beta$ quando não acontece, na situação presente, que α é verdadeira e β é falsa. Nada mais. (Mas claro que ninguém é obrigado a gostar disso. Voltaremos a falar no assunto no capítulo 18.)

9.2.5 Bi-implicação

A análise dos bicondicionais tem, obviamente, os mesmos problemas da análise dos condicionais. Uma bi-implicação corresponde a uma implicação nas duas direções: $\alpha \leftrightarrow \beta$ é o mesmo que $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. A partir disso, fica fácil calcular, usando as ta-

belas de conjunção e implicação, os valores da tabela do bicondicional:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**F**	**V**

Uma outra maneira de entender isso é pensar que $\alpha \leftrightarrow \beta$ afirma que α é equivalente a β. Sendo α e β equivalentes, elas deveriam ter o *mesmo* valor. Assim, nas linhas onde α e β têm o mesmo valor (ambas verdadeiras, ou ambas falsas), o bicondicional $\alpha \leftrightarrow \beta$ tem o valor **V** (primeira e quarta linhas). Caso α e β tenham valores diferentes, $\alpha \leftrightarrow \beta$ terá o valor **F** (segunda e terceira linhas).

9.3 Valorações

A partir das tabelas básicas para os operadores, que apresentamos acima, podemos definir um primeiro tipo, simplificado, de interpretação: uma *interpretação proposicional*, ou *valoração*. Você recorda, da discussão anterior, que, na lógica proposicional, consideramos que as fórmulas moleculares são construídas a partir de fórmulas atômicas (no caso, letras sentenciais apenas) pelo uso de operadores. Uma vez que o valor de uma fórmula molecular pode ser obtido a partir do valor de seus componentes, uma valoração só precisa atribuir um valor de verdade a cada uma das fórmulas atômicas. E é justamente isso que uma valoração é: uma atribuição de valor de verdade a todas as fórmulas atômicas. Podemos definir uma valoração, portanto, como uma função que toma argumentos no conjunto de todas as fórmulas atômicas, e dá a elas valores no conjunto dos valores de verdade $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.

Por exemplo, digamos que temos as seguintes fórmulas: A, B, C, e D. Uma certa valoração, vamos chamá-la de v_1, poderia atribuir a essas fórmulas os seguintes valores: **V**, **F**, **V**, e **F**, respectivamente. Isto é:

$$v_1(A) = \mathbf{V}, \quad v_1(B) = \mathbf{F}, \quad v_1(C) = \mathbf{V}, \quad v_1(D) = \mathbf{F}.$$

A expressão '$v_1(A) = \mathbf{V}$', claro, significa que o valor de verdade de A na valoração v_1 é **V**. Outras valorações diferentes, que poderíamos denominar v_2 e v_3, poderiam atribuir a essas fórmulas os seguintes valores:

$$v_2(A) = \mathbf{F}, \quad v_2(B) = \mathbf{V}, \quad v_2(C) = \mathbf{V}, \quad v_2(D) = \mathbf{V},$$
$$v_3(A) = \mathbf{F}, \quad v_3(B) = \mathbf{F}, \quad v_3(C) = \mathbf{F}, \quad v_3(D) = \mathbf{F}.$$

É bom lembrar que uma valoração atribui um valor de verdade a *todas* as fórmulas atômicas de uma linguagem proposicional. O que apresentamos acima foi apenas uma parte minúscula de v_1, v_2 e v_3.

Agora, como o valor de uma fórmula molecular numa valoração v qualquer pode ser calculado a partir dos valores que suas fórmulas mais simples tomam, uma vez que tenhamos uma fórmula α, e saibamos que valores v atribui às letras sentenciais que ocorrem em α, podemos calcular o valor de α com respeito a v. Isto é, podemos estender v de forma a que ela atribua um valor a qualquer fórmula, não somente às fórmulas atômicas.

Vamos a mais um exemplo: tomemos a fórmula $(C \wedge B) \rightarrow \neg D$, e seja v_1 como acima. Uma vez que $v_1(C) = \mathbf{V}$, e $v_1(B) = \mathbf{F}$, a tabela da conjunção nos diz que $v_1(C \wedge B) = \mathbf{F}$. E, uma vez que $v_1(D) = \mathbf{F}$, $\neg D$ terá o valor **V** com respeito a v_1. Tendo, assim, os valores tanto do antecedente quanto do conseqüente da implicação principal, o resultado final será que $v_1((C \wedge B) \rightarrow \neg D) = \mathbf{V}$. Como você vê na figura 9.1.

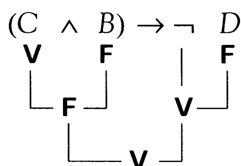


FIGURA 9.1 — Calculando o valor de $(C \wedge B) \rightarrow \neg D$ em v_1.

E qual seria o valor da mesma fórmula na valoração v_2? Bem, como $v_2(C) = v_2(B) = \mathbf{V}$, temos que $v_2(C \wedge B) = \mathbf{V}$. E como $v_2(D) = \mathbf{V}$, $v_2(\neg D) = \mathbf{F}$. Logo, $v_2((C \wedge B) \rightarrow \neg D) = \mathbf{F}$. Confira na figura 9.2.

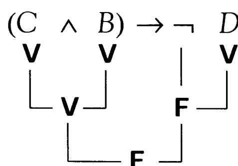


FIGURA 9.2 — Calculando o valor de $(C \wedge B) \rightarrow \neg D$ em v_2.

Podemos, enfim, dizer que uma fórmula α é verdadeira em uma valoração v se $v(\alpha) = \mathbf{V}$. O valor de uma fórmula atômica é dado pela valoração, e o valor de uma fórmula molecular pode ser calculado usando-se as tabelas básicas.

Uma outra maneira de definir uma valoração, porém, e que é a definição que vamos adotar oficialmente daqui por diante, é a seguinte:

Definição 9.2 *Uma valoração v é uma função do conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem proposicional no conjunto de valores de verdade $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, tal que:*

(a) $v(\neg\alpha) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$;
(b) $v(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta) = \mathbf{V}$;
(c) $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{V}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(d) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(e) $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta)$.

Algumas observações sobre essa definição. Primeiro, note que ela foi especificada em termos de condições necessárias e suficientes, usando 'sse' (isto é, 'se e somente se'). Considere a letra (a), por exemplo:

$$v(\neg\alpha) = \mathbf{V} \text{ sse } v(\alpha) = \mathbf{F}.$$

A idéia é que $\neg\alpha$ recebe o valor **V** exatamente quando α tem o valor **F**. Obviamente, então $\neg\alpha$ recebe o valor **F** quando α tem o valor **V**. Isso é equivalente ao seguinte:

$$v(\neg\alpha) = \mathbf{V}, \quad \text{se} \quad v(\alpha) = \mathbf{F};$$
$$v(\neg\alpha) = \mathbf{F}, \quad \text{se} \quad v(\alpha) = \mathbf{V}.$$

As condições para as outras fórmulas são analogamente formuladas.

Segundo, observe que as condições especificadas nessa definição de verdade espelham os requisitos das tabelas básicas. Por exemplo, uma condição necessária e suficiente para $\alpha \wedge \beta$ ser verdadeira é que tanto α quanto β sejam verdadeiras; $\alpha \wedge \beta$ será falsa se α for, ou se β for. O caso da implicação é curioso: $\alpha \rightarrow \beta$ é verdadeira se α (o antecedente) for falsa, ou se β (o conseqüente) for verdadeira. Se você conferir na tabela da implicação, você verá que isso faz sentido: se o antecedente de uma implicação é falso, ela é automaticamente verdadeira, independentemente de que valor de verdade possa ter o conseqüente. Analogamente, se o conseqüente for verdadeiro.

Exercício 9.1 Supondo que A, B, C, e D têm valores **V**, **F**, **F**, e **V**, respectivamente, numa certa valoração v, calcule o valor em v das fórmulas abaixo.

(a) $\neg A \wedge B$

(b) $\neg B \rightarrow (A \vee B)$

(c) $(C \vee A) \leftrightarrow \neg\neg C$

(d) $A \vee (A \rightarrow B)$

(e) $(D \vee \neg A) \rightarrow \neg C$

(f) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$

(g) $\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$

(h) $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$

9.4 Tabelas de verdade

Para determinar a validade de um argumento, contudo, precisamos saber o valor de certas fórmulas não apenas com respeito a uma certa valoração (que poderia, digamos, corresponder ao mundo real), mas em todos os casos possíveis. Por exemplo, suponhamos que temos algum conjunto de premissas, de onde se pretende tirar, como conclusão, a fórmula $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$. Como calcular, em todos os casos possíveis, o valor dessa fórmula, para que possamos determinar se, sempre que as premissas são verdadeiras, essa fórmula também é verdadeira?

A solução é simples: basta examinar o que são os 'casos possíveis' mencionados acima. Em princípio, isso corresponderia a todas as valorações — mas note que o número de valorações distintas pode ser até infinito, se tivermos um conjunto infinito de fórmulas atômicas

(isto é, de letras sentenciais). Entretanto, as coisas não são tão ruins assim. Examinando $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$, vemos que estão envolvidas apenas *duas* fórmulas atômicas, A e B. Uma vez que, seja lá que valoração tivermos, elas podem apenas ser ou verdadeiras ou falsas, o número de combinações possíveis, que listamos na tabela a seguir, é *quatro*:

A	B
V	**V**
F	**V**
V	**F**
F	**F**

Assim, apesar do número infinito de valorações distintas, com relação a A e B as valorações se dividem em quatro grupos: as que dão **V** às duas fórmulas (linha 1 da tabela); as que dão **F** a A e **V** a B (linha 2); as que dão **V** a A e **F** a B (linha 3); e, finalmente, aquelas que dão **F** às duas fórmulas. Seja lá qual for a valoração, com relação a A e B ela cai em uma dessas quatro possibilidades, não havendo outras.

A partir daí, fica fácil calcular o resto. O que precisamos fazer é completar o lado direito da tabela com as subfórmulas imediatas de $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$ — mas, antes disto, com as subfórmulas imediatas destas, e assim por diante, na ordem que vai das mais simples para as mais complexas. Ou seja, precisamos fazer a lista de todas as subfórmulas de $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$, pois, para calcular o valor de qualquer fórmula, precisamos, obviamente, do valor de suas subfórmulas imediatas. Ora, a lista das subfórmulas de $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$ é

$$A, B, \neg A, \neg A \wedge B,$$

e o que fazemos, então, é simplesmente acrescentar isso à tabela, colocando $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$ no final:

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$
V	**V**			
F	**V**			
V	**F**			
F	**F**			

Agora, calculemos. Para obter o valor de $\neg A$ em uma linha, olhamos que valor A tem nessa linha. Assim, usando as tabelas básicas dos operadores, e seguindo as colunas da esquerda para a direita, ficamos, afinal, com o seguinte resultado:

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$
V	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

Como você vê, a coluna final, embaixo da fórmula $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$, nos dá o valor que ela tem para cada valoração. Curiosamente, essa fórmula ficou com o valor **V** em todas as linhas.. Falaremos logo mais sobre isso, mas, antes, vamos ver mais um exemplo. Seja a fórmula $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg B$. A lista de todas as suas subfórmulas é a seguinte:

$$A, B, C, \neg A, \neg B, \neg A \vee C.$$

Examinando essa lista, vemos que existem três fórmulas atômicas: A, B, C. Como temos três fórmulas, teremos *oito* combinações diferentes de valores de verdade. Como você vê a seguir:

A	B	C
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**F**	**V**
V	**V**	**F**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**F**	**F**

Dado um número n de fórmulas atômicas, fica fácil calcular o número l de linhas que a tabela vai ter, através da seguinte equação:

$$l = 2^n.$$

No nosso exemplo, uma vez que $n = 3$, o número de linhas l será 2^3, isto é, $l = 8$. A tabela completa, tendo sido calculados todos os valores, fica assim:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee C$	$(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg B$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Exercício 9.2 Construa tabelas de verdade para as fórmulas do exercício 9.1.

9.5 Tautologias, contradições e contingências

Se voltarmos a examinar as tabelas de verdade construídas no exercício anterior, poderemos notar a existência de algumas fórmulas cujo valor de verdade é sempre verdadeiro, qualquer que seja o valor atribuído às fórmulas atômicas que nela ocorrem. Em outras palavras, há fórmulas que obtêm **V** em todas as linhas de sua tabela, o que significa que elas têm o valor **V** em toda e qualquer valoração. Por exemplo, considere a tabela de verdade para a fórmula $A \to (A \vee C)$:

A	C	$A \vee C$	$A \to (A \vee C)$
V	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

Como você vê, em cada uma das possíveis atribuições de valores de verdade às fórmulas atômicas A e C, a fórmula $A \to (A \vee C)$ resulta verdadeira. Uma vez que sua verdade é independente dos valores

de verdade de seus componentes mais elementares (as fórmulas atômicas), poderíamos dizer que uma tal fórmula é verdadeira apenas em função do significado dos operadores que nela ocorrem. A fórmulas com essa característica damos o nome de *tautologia*.

Um outro tipo de fórmula é o daquelas cujo valor de verdade é sempre falso, como $A \wedge \neg A$ no exemplo seguinte:

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**

A fórmulas com essa característica damos o nome de *contradição*. Note que a negação de uma tautologia é, obviamente, uma contradição; e a negação de uma contradição, uma tautologia. Se uma fórmula tem sempre o valor **V**, sua negação sempre terá o valor **F**, e vice-versa. Um outro nome para estas fórmulas é *logicamente falsas*, ou *inconsistentes*. (Há autores que preferem reservar o nome 'contradição' a fórmulas da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$, ou seja, a conjunção de uma fórmula com sua negação.)

Naturalmente, como você já percebeu no exercício anterior, nem todas as fórmulas são tautologias ou contradições. Um terceiro tipo de fórmula é o daquelas cuja tabela de verdade tem **V** em pelo menos uma linha, e **F**, igualmente, em ao menos uma linha. A esse tipo de fórmula denominamos *contingência*. Contingências são fórmulas cuja verdade ou falsidade não pode ser determinada apenas por meio de uma análise lógica: é necessário recorrer à observação para isso. Ou seja, elas fazem uma descrição do mundo. Por isso costuma-se dizer que o conteúdo informacional de tautologias e contradições é vazio — sendo verdadeiras ou falsas independentemente da realidade, elas não dizem nada sobre o mundo real, ao contrário das contingências.

Podemos resumir as considerações anteriores na seguinte definição:

Definição 9.3 *Uma fórmula α é uma tautologia se, para toda valoração v, $v(\alpha) =$* **V**. *Dizemos que α é uma contradição se, para toda valoração v, $v(\alpha) =$* **F**. *E α é uma contingência se não for uma coisa nem outra, ou seja, se existe pelo menos uma valoração v_1 tal que $v_1(\alpha) =$* **V**, *e ao menos uma valoração v_2 tal que $v_2(\alpha) =$* **F**.

Por serem sempre verdadeiras — logicamente verdadeiras — as tautologias são aquelas fórmulas a que se costuma dar o nome de *leis lógicas*. Nesse sentido, se caracterizarmos um sistema de lógica como um conjunto de "leis", o conjunto das tautologias caracteriza uma determinada lógica: o cálculo proposicional clássico, **CPC**.

Abaixo, você tem uma lista contendo algumas das tautologias mais conhecidas (note que estamos apresentando *esquemas* de fórmulas):

Princípio de identidade	$\alpha \rightarrow \alpha$
Princípio de não-contradição	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
Princípio do terceiro excluído	$\alpha \vee \neg\alpha$
Dupla negação	$\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
Idempotência da disjunção	$(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$
Idempotência da conjunção	$(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$
Comutatividade da disjunção	$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$
Comutatividade da conjunção	$(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$
Comutatividade da equivalência	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$
Associatividade da disjunção	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
Associatividade da conjunção	$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
Associatividade da equivalência	$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma)$
Leis de De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
	$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
Contraposição	$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
Distributividade	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
	$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
Modus ponens	$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$
Modus tollens	$(\neg\beta \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \neg\alpha$
Silogismo disjuntivo	$((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$
Silogismo hipotético	$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
Lei de Peirce	$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
Lei de Duns Scot	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
Prefixação	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
Antilogismo	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$
Exportação/Importação	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$

As três primeiras fórmulas dessa lista exprimem (em uma linguagem proposicional) três dos princípios fundamentais da lógica, que já haviam sido reconhecidos por Aristóteles. Quanto às outras tautologias notáveis, a lei de Dupla Negação confirma o fato de que uma proposição como 'Não é o caso que não chove' é realmente equivalente a 'Chove'. As leis comutativas e associativas mostram que, no

caso de disjunções, conjunções e equivalências, a ordem dos elementos não importa, e que, numa seqüência de fórmulas ligadas por um desses operadores, não importa de que modo colocamos os parênteses para agrupá-las. Que a implicação, contudo, não é associativa você pode ver no item (h) do exercício 9.3 mais abaixo. A implicação também não é comutativa, claro. As leis de De Morgan são assim chamadas em razão do lógico inglês Augustus De Morgan (1806–1871), que primeiro as formulou. Observações similares valem para as leis de Peirce e Duns Scot. A propósito, a lei de Duns Scot e a prefixação são dois dos chamados "paradoxos" da implicação material e mostram que a formalização, no **CPC** (e, portanto, no **CQC**), da noção de implicação não corresponde realmente a nossas idéias intuitivas sobre o que uma implicação deveria ser.

Existem, naturalmente, muitas outras tautologias além das poucas mencionadas nessa lista. De fato, há um número infinito delas, e por isso é importante que se disponha de um teste efetivo, como o das tabelas de verdade, para determinar se uma fórmula é uma tautologia — ou, como definiremos logo a seguir, se uma fórmula é ou não conseqüência lógica de outras.

Exercício 9.3 Determine se as fórmulas seguintes são tautologias, contradições ou contingências:

(a)	$\neg\neg A \leftrightarrow (A \vee A)$	(e)	$\neg(F \vee B) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg B)$
(b)	$B \vee \neg(B \wedge C)$	(f)	$\neg(B \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg A)$
(c)	$(A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$	(g)	$\neg(\neg D \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \vee \neg D)$
(d)	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$	(h)	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

9.6 Implicação e equivalência tautológicas

Agora que dispomos das valorações — que são interpretações simples, no nível proposicional —, já temos os elementos necessários para dar uma definição precisa de conseqüência lógica, ou seja, definir quando é que alguma fórmula α é conseqüência lógica de algum conjunto de fórmulas Γ. Vamos começar com um caso mais simples, tomando apenas duas fórmulas, α e β: quando é que, digamos, β é conseqüência lógica de α? Isso é definido da seguinte maneira:

Definição 9.4 *Uma fórmula α implica tautologicamente uma fórmula β (ou β é uma conseqüência tautológica de α) se, para toda valoração v tal que $v(\alpha) = \mathbf{V}$, temos que $v(\beta) = \mathbf{V}$.*

Vamos explicar isso. Em primeiro lugar, estamos definindo conseqüência (ou implicação) *tautológica*: esse é um caso particular de conseqüência lógica, a saber, conseqüência lógica no nível de interpretações proposicionais, ou seja, para o **CPC**. Como veremos posteriormente, a noção de conseqüência lógica para o **CQC** é mais ampla do que a noção de conseqüência tautológica. Em segundo lugar, note como a definição é parecida com nossa idéia informal de conseqüência lógica: β é conseqüência de α se, sempre que α for verdadeira, β também for verdadeira. (Ou, dito de modo mais preciso, se em toda valoração v tal que $v(\alpha) = \mathbf{V}$, temos $v(\beta) = \mathbf{V}$).

Para dizer que α implica tautologicamente β, vamos usar o símbolo '$\vDash$' e escrever

$$\alpha \vDash \beta.$$

Essa noção de implicação ou conseqüência pode ser naturalmente estendida a conjuntos de fórmulas, que é o que realmente nos interessa. Primeiro, precisamos dizer quando uma valoração é *modelo* de um conjunto de fórmulas.

Definição 9.5 *Uma valoração v é modelo de um conjunto de fórmulas Γ se, para toda $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) = \mathbf{V}$.*

Ou seja, uma valoração v é modelo de Γ se todas as fórmulas desse conjunto têm o valor $\mathbf{V}$ em v. Escrevemos '$v \vDash \Gamma$' para indicar que v é modelo de Γ. Obviamente, se existir alguma $\gamma \in \Gamma$ tal que $v(\gamma) = \mathbf{F}$, então v *não é* modelo de Γ, o que escrevemos assim: $v \nvDash \Gamma$.

Para exemplificar, considere o conjunto Γ e as duas valorações v_1 e v_2 a seguir:

$$\Gamma = \{A \rightarrow B, \neg A, \neg B\},$$
$$v_1(A) = \mathbf{F}, \quad v_1(B) = \mathbf{F},$$
$$v_2(A) = \mathbf{F}, \quad v_2(B) = \mathbf{V}.$$

É fácil ver que $v_1 \vDash \Gamma$: como A e B têm $\mathbf{F}$ em v_1, $\neg A$ e $\neg B$ ganham $\mathbf{V}$. Analogamente, $A \rightarrow B$ também ganha $\mathbf{V}$. Assim, todas as fórmulas

de Γ são verdadeiras em v_1. Pela definição, v_1 é modelo de Γ, $v_1 \vDash \Gamma$. Por outro lado, como $v_2(B) = \mathbf{V}$, $\neg B$ tem **F** em v_2. Como há ao menos uma fórmula de Γ que é falsa em v_2, v_2 não é modelo de Γ, $v_2 \nvDash \Gamma$.

Definição 9.6 *Seja Γ um conjunto de fórmulas, e α uma fórmula. Dizemos que α é uma conseqüência tautológica de Γ (ou que Γ implica tautologicamente α) se, para toda valoração v tal que $v \vDash \Gamma$, $v(\alpha) = \mathbf{V}$.*

Escrevemos '$\Gamma \vDash \alpha$' para indicar que α é uma conseqüência tautológica do conjunto Γ. O que a definição acima está dizendo, claro, é que α é conseqüência tautológica de Γ se α tiver o valor **V** em toda valoração que for modelo de Γ, ou seja, em toda valoração que dá **V** a todas as fórmulas de Γ. Isso corresponde à idéia informal de "sempre que as fórmulas em Γ são verdadeiras, α é verdadeira". Dito ainda de outra forma, $\Gamma \vDash \alpha$ se não existe nenhuma valoração v tal que $v \vDash \Gamma$ e $v(\alpha) = \mathbf{F}$.

Um conceito relacionado ao de implicação tautológica é o de *equivalência tautológica* entre duas fórmulas, que definimos como se segue:

Definição 9.7 *Uma fórmula α é tautologicamente equivalente a uma fórmula β se, qualquer que seja a valoração v, $v(\alpha) = v(\beta)$.*

Uma vez que definimos conseqüência tautológica, podemos aplicar isso, por exemplo, no teste de validade de um argumento. Suponhamos que tivéssemos um argumento formalizado da seguinte maneira:

P_1 $(A \vee B) \rightarrow C$
P_2 $\neg B$
► $A \rightarrow C$

e quiséssemos testar sua validade. É claro que o argumento, assim formalizado, será válido se sua conclusão, $A \rightarrow C$, for conseqüência tautológica de suas premissas. O que significa dizer que $A \rightarrow C$ deve ser verdadeira em toda valoração que for modelo das premissas.

É claro que não precisaremos examinar *todas* as valorações para isso. Como você viu anteriormente, tendo um número finito n de fórmulas atômicas, teremos 2^n valorações diferentes com respeito a elas — o que corresponde a 2^n linhas em uma tabela de verdade.

O que precisamos fazer, então, é construir uma tabela de verdade na qual apareçam todas as fórmulas envolvidas: as premissas e a conclusão do argumento formalizado. Com respeito àquele argumento apresentado acima, temos então:

A	B	C	$A \vee B$	P1 $(A \vee B) \to C$	P2 $\neg B$	▶ $A \to C$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	[**V**]	[**V**]	**V**
F	**F**	**V**	**F**	[**V**]	[**V**]	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	[**V**]	[**V**]	**V**

Construída a tabela acima, que lista todas as valorações possíveis para as fórmulas atômicas A, B, e C, e calculado o valor das premissas e da conclusão em cada linha, só precisamos verificar se toda valoração que é modelo do conjunto de premissas atribui **V** também à conclusão. As linhas em que todas as premissas recebem **V** são as linhas 3, 4 e 8 (o que está indicado, na tabela, por meio dos quadradinhos). E, como você vê, em todas essas linhas a conclusão $A \to C$ também recebe o valor **V**. Dito de outra forma, não existe nenhuma linha na qual $(A \vee B) \to C$ e $\neg B$ sejam verdadeiras, e $A \to C$ seja falsa. Assim, $A \to C$ é uma conseqüência tautológica de P_1 e P_2.

Vamos ver, agora, um contra-exemplo. Digamos que temos um argumento que foi formalizado assim:

P_1 $B \to A$

P_2 $\neg B$

▶ $\neg A$

Para testar sua validade, construímos uma tabela na qual apareçam as premissas e conclusão. Como temos apenas duas fórmulas atômicas, B e A, esta tabela terá quatro linhas:

		P_1	P_2	▶
A	B	$B \rightarrow A$	$\neg B$	$\neg A$
V	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F***
F	**F**	**V**	**V**	**V**

Note que existem duas linhas que são modelo das premissas: 3 e 4. E, embora na linha 4 a conclusão tenha o valor **V**, na linha 3 (marcada com um asterisco) ela tem **F**. Ou seja, existe uma linha (uma valoração) na qual as premissas são verdadeiras, e a conclusão é falsa. Em conseqüência, $\neg A$ *não é* conseqüência lógica de $B \rightarrow A$ e $\neg B$.

De modo similar ao que foi feito acima, se quisermos mostrar que duas fórmulas α e β são tautologicamente equivalentes, podemos construir uma tabela de verdade em que as duas apareçam, e verificar se elas têm o mesmo valor em todas as linhas. Se tiverem, são tautologicamente equivalentes; caso contrário, não.

Exercício 9.4 Usando tabelas de verdade, verifique se as conclusões indicadas abaixo de fato são conseqüência tautológica das premissas, ou não:

(a) $A \vee B, \neg A \vDash B$
(b) $A \leftrightarrow B, \neg A \vDash \neg B$
(c) $\neg(A \wedge B) \vDash \neg B \wedge \neg A$
(d) $A \rightarrow B \vDash A \vee B$
(e) $\neg A \rightarrow \neg B \vDash A \rightarrow B$
(f) $A, A \rightarrow C \vDash A \leftrightarrow C$
(g) $B \rightarrow \neg C \vDash \neg(B \wedge C)$
(h) $\neg(A \vee B), F \leftrightarrow A \vDash \neg F$
(i) $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \vDash \neg D$
(j) $A \vDash (A \rightarrow (B \wedge A)) \rightarrow (A \wedge B)$
(k) $(B \wedge C) \rightarrow F, \neg B, \neg C \vDash \neg F$
(l) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vDash A \leftrightarrow C$
(m) $A \rightarrow (B \vee C), (B \wedge C) \rightarrow D \vDash A \rightarrow D$
(n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \rightarrow D \vDash A \rightarrow D$
(o) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vDash A$

Exercício 9.5 Usando tabelas de verdade, verifique se os pares de fórmulas abaixo são tautologicamente equivalentes ou não:

(a) $A \rightarrow B$ e $\neg A \vee B$
(b) $A \wedge B$ e $\neg(\neg A \vee \neg B)$
(c) $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$
(d) $A \leftrightarrow B$ e $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
(e) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ e $(A \rightarrow B) \rightarrow C$
(f) $\neg\neg A$ e A

9.7 Outros comentários sobre as valorações

Podemos resumir o que fizemos neste capítulo da seguinte maneira: escolhemos uma sublinguagem da linguagem do **CQC** (uma linguagem proposicional, contendo apenas operadores, parênteses e símbolos de predicado zero-ários) e definimos o que são interpretações para ela (valorações). Ainda que simples, as valorações já nos possibilitaram definir validade e conseqüência lógica, o que nos permite testar a validade de muitos argumentos, ainda que isso não seja suficiente para o **CQC** todo.

O que é importante mencionar ainda é que não precisaríamos ter restringido as valorações apenas a linguagens com letras sentenciais. Elas podem ser definidas para toda a linguagem do **CQC**. Para ver como é isso, considere mais uma vez um argumento (formalizado) que foi apresentado anteriormente, a saber:

P$_1$ $\forall x(Gx \rightarrow Px) \rightarrow Pm$
P$_2$ $\forall x(Gx \rightarrow Px)$
▶ Pm

Tendo o argumento já sido transcrito dessa maneira para a linguagem do **CQC**, é simples alterar a definição de valoração para mostrar sua validade, sem ter que reformalizá-lo assim:

P$_1$ $A \rightarrow B$
P$_2$ A
▶ B

Lembre-se de que a idéia básica de uma valoração é permitir-nos calcular o valor de uma fórmula molecular a partir do valor de seus componentes. Ora, podemos considerar que uma fórmula molecular é composta a partir de, basicamente, fórmulas atômicas ou fórmulas gerais (nestas, claro, pode haver fórmulas moleculares que sejam subfórmulas, mas isso não importa).

Vamos definir uma *fórmula elementar* como qualquer fórmula que seja ou atômica ou geral. Por exemplo, tanto Pab quanto $\forall z \neg Qz$ e $\forall x \exists y(\neg Fx \rightarrow Gy)$ são fórmulas elementares (a primeira é atômica; as outras, gerais). Por outro lado, fórmulas como $\neg Pab$ e $\forall x \exists y Lxy \rightarrow \forall z Qz$ não são elementares, pois são moleculares.

Podemos definir, agora, uma valoração como uma função não apenas do conjunto das letras sentenciais no conjunto dos valores de verdade, mas do conjunto de todas as fórmulas elementares no conjunto $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Ou, de outro modo, como fizemos na definição 9.2, mas generalizando para qualquer linguagem de primeira ordem:

Definição 9.8 *Uma valoração v é uma função do conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem de primeira ordem no conjunto de valores de verdade $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, tal que:*

(a) $v(\neg\alpha) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$;
(b) $v(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta) = \mathbf{V}$;
(c) $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{V}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(d) $v(\alpha \to \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(e) $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta)$.

(Essa passa a ser, de agora em diante, nossa definição final de valoração.)

Feita essa definição, note que tudo vai continuar como antes, exceto que as tautologias, por exemplo, também podem agora ser fórmulas numa linguagem qualquer de primeira ordem — desde que verdadeiras em toda valoração. Para entender isso, observe o seguinte: na relação de tautologias que vimos anteriormente, encontramos, por exemplo, o esquema de fórmula $\neg\neg\alpha \to \alpha$. Isso significa que qualquer fórmula da forma $\neg\neg\alpha \to \alpha$ é uma tautologia. Ora, isso deveria — e agora pode — incluir uma fórmula como

$$\neg\neg Pa \to Pa,$$

ou ainda

$$\neg\neg\forall x Px \to \forall x Px,$$

ou mesmo ainda

$$\neg\neg(Pa \vee \exists y \exists z Fzy) \to (Pa \vee \exists y \exists z Fzy).$$

Todas as fórmulas acima são instâncias, ou seja, casos particulares, de $\neg\neg\alpha \to \alpha$. E todas as três fórmulas são verdadeiras em qualquer valoração. Não importa que significado vamos dar depois a P

e F; $\neg\neg(Pa \vee \exists y \exists z Fzy) \to (Pa \vee \exists y \exists z Fzy)$ vai continuar sendo sempre verdadeira.

Assim, tendo definido as valorações dessa nova maneira, tendo como caso-base qualquer fórmula atômica, ou qualquer fórmula geral (pois não temos condições de obter ainda o valor de verdade de fórmulas gerais a partir de outras coisas), podemos aplicar as valorações a toda a linguagem do **CQC**, e determinar a validade de muitas outras formas de argumento que envolvam mais do que apenas símbolos de predicados zero-ários. Claro que haverá argumentos válidos que as valorações demonstrarão inválidos, mas isso é porque elas ainda são demasiado simples.

Finalmente, pode-se mostrar, da seguinte maneira, que o argumento apresentado anteriormente nesta seção é válido: ele contêm duas fórmulas elementares, a saber, as fórmulas $\forall x(Gx \to Px)$ e Pm. Uma tabela de verdade, portanto, teria quatro linhas. E o resto continua como antes. Assim:

P2 $\forall x(Gx \to Px)$	▶ Pm	P1 $\forall x(Gx \to Px) \to Pm$
[V]	V	[V]
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Como você pode ver, o argumento é (proposicionalmente) válido. Na única linha (que é a linha 1) em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também o é. Assim, a conclusão é conseqüência tautológica das premissas, e o argumento é válido.

Exercício 9.6 Usando a nova definição de valoração, determine se as fórmulas à direita de $\vDash$ são ou não conseqüência lógica das demais:

(a) $Pa \vee Qb, \neg Pa \vDash Qb$

(b) $(Pa \wedge Fc) \to \exists x Hx, \neg Pa, \neg\exists x Hx \vDash \neg Fc$

(c) $\neg(Rbc \wedge Gm), D \leftrightarrow Rbc \vDash \neg Gm$

(d) $\forall x Ax \leftrightarrow \forall x Bx, \forall x Bx \leftrightarrow \exists x Hx \vDash \forall x Ax \to \exists x Hx$

(e) $(\neg A \vee Qb) \vee \forall x \exists y Rxy, (Qb \vee \forall x \exists y Rxy) \to Lab \vDash A \to Lab$

CAPÍTULO 10

ESTRUTURAS E VERDADE

Neste capítulo, você vai ver, enfim, como interpretar linguagens de primeira ordem. Vamos iniciar examinando de maneira informal as noções de estrutura, e de verdade em uma estrutura, deixando para apresentar as definições completas num segundo momento.

10.1 O valor semântico das expressões

Vamos começar com o argumento apresentado como exemplo no início do capítulo 8, e com sua tradução para uma linguagem de primeira ordem:

P1	Todo planeta joviano tem anéis.	P1	$\forall x(Jx \to Ax)$
P2	Netuno é um planeta joviano.	P2	Jn
▶	Netuno tem anéis.	▶	An

Conforme mencionei anteriormente, ao especificar uma linguagem de primeira ordem já temos em vista um certo domínio de aplicação, e os símbolos (não-lógicos) vão sendo escolhidos já com um certo significado informal a eles associado. Vimos também que essa interpretação informal não é suficiente para nossos propósitos de analisar a validade (ou invalidade) de um argumento. Assim, no capítulo anterior, nos ocupamos de um tipo simples de interpretação formal:

as *valorações*. Contudo, como você recorda, as valorações nos permitem apenas determinar o valor de verdade de fórmulas moleculares —, mas não de fórmulas atômicas ou gerais, que recebem, claro, um valor, mas arbitrário. É fácil ver que isso tem algumas conseqüências indesejáveis, se tentarmos determinar a validade do argumento acima apresentado. Todos concordamos que ele é intuitivamente válido; porém, construindo uma tabela de verdade para ele, vamos nos deparar com a seguinte situação: todas as três fórmulas envolvidas, $\forall x(Jx \rightarrow Ax)$, Jn e An, são elementares (i.e., atômicas ou gerais), e é fácil encontrar uma valoração v tal que $v(\forall x(Jx \rightarrow Ax)) = \mathbf{V}$, $v(Jn) = \mathbf{V}$ e $v(An) = \mathbf{F}$. Ou seja, o argumento formalizado resulta inválido!

Claramente, há um descompasso entre nossa convicção intuitiva da validade do argumento e o resultado obtido por uma análise dele em termos de valorações. O problema é justamente que as valorações não são sofisticadas o suficiente para dar conta de fórmulas gerais, por exemplo. A análise que precisamos fazer tem que ser mais fina; temos que descer a um nível de detalhamento maior na interpretação de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ qualquer, e isso vai ser possível utilizando a noção de uma *estrutura para* $\mathcal{L}$. Isso vai ser algo bem mais complexo do que as valorações que vimos anteriormente: não podemos nos limitar a dizer que tais ou quais fórmulas atômicas (e gerais) são verdadeiras ou falsas — precisamos dizer por quê. Ou seja, precisamos especificar suas condições de verdade. Para isso, precisamos associar a cada uma das *expressões básicas* da linguagem, das quais são compostas as fórmulas atômicas, um *valor semântico*, isto é, uma interpretação ou significado.

Esse nível maior de detalhamento é um refinamento daquela versão do princípio de composicionalidade (ou princípio de Frege) apresentada no capítulo anterior. Vimos ali que o valor de verdade de uma fórmula molecular pode ser determinado a partir dos valores de suas subfórmulas. Veremos aqui que isso pode ser feito também com as fórmulas gerais — e algo similar acontece com as fórmulas atômicas, que, claro, não têm subfórmulas próprias, mas são compostas de outras coisas, como constantes de predicado e constantes individuais.

Tomemos uma fórmula atômica como exemplo, digamos, Pa. De acordo com o princípio de composicionalidade, o valor semântico dessa fórmula — seu valor de verdade — vai depender dos valores

semânticos atribuídos aos símbolos que a compõem, ou seja, dos valores de P e de a. Mas, que valores serão esses, e onde obtê-los?

Ora, a idéia é que as expressões da linguagem — as fórmulas, por um lado, e as expressões básicas, por outro — devem ter um valor semântico, uma interpretação. No caso de fórmulas, isso é simples: esse valor semântico é um valor de verdade, como vimos até agora. E as constantes individuais, por exemplo? Bem, do ponto de vista intuitivo, se as constantes funcionam como *nomes*, então o valor semântico de uma constante deve ser um *indivíduo*. Se P é um símbolo de propriedade, seu valor semântico deverá ser uma propriedade. Se é um símbolo de relação binária, uma relação binária. E assim por diante. (Recorde, a propósito, que símbolos lógicos como $\wedge$ e $\neg$ já têm um significado fixo, e assim não precisamos nos preocupar com eles.)

O papel das estruturas, que veremos a seguir, é o de especificar os valores semânticos desejados e, dessa maneira, nos permitir determinar se as fórmulas são verdadeiras ou falsas na estrutura. Finalmente, poderemos, então, definir conseqüência lógica por meio das estruturas (como havíamos feito com as valorações). Essa nova noção de conseqüência lógica valerá para todo o **CQC**, ao contrário da definição anterior, de conseqüência tautológica, que se restringe ao cálculo proposicional, o **CPC**.

10.2 Estruturas

Ao construir uma estrutura $\mathfrak{A}$ para uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, a primeira coisa a fazer é delimitar o domínio das entidades sobre as quais estamos falando, ou seja, determinar que indivíduos "existem". No mundo real, isso não é normalmente um problema: existe tudo o que existe. Mas, na nossa situação, na qual tentamos considerar os vários casos possíveis, certamente teremos de imaginar que tais ou quais indivíduos, ao contrário do mundo real, existem ou deixam de existir. (Um mundo no qual houvesse unicórnios, por exemplo, mas nenhum político.) A esse domínio de entidades (o 'universo do nosso discurso', se você quiser usar essa expressão) denominamos *universo* ou *domínio* da estrutura. (A propósito, vamos

utilizar as letras góticas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. para designar estruturas.)

O universo A de uma estrutura $\mathfrak{A}$ é usualmente definido como um conjunto não-vazio: isto é, um conjunto que precisa ter *ao menos um* elemento. Fora isso, não se costuma colocar nenhuma restrição. Farei, porém, a restrição adicional de que esse conjunto seja *contável* (isto é, finito ou, se infinito, enumerável), por razões que depois serão mencionadas. Assim, podemos tomar como universo de uma estrutura qualquer um dos conjuntos abaixo:

o conjunto dos seres humanos;
o conjunto dos gatos, gambás e quatis;
o conjunto dos números naturais;
o conjunto dos números racionais maiores que 32;
{Immanuel Kant, Moreira da Silva, $\sqrt{3}$, Mr. Bean};
{Salma Hayek}.

Note que alguns dos conjuntos acima são finitos, isto é, existe apenas um número finito de indivíduos no universo, enquanto outros são infinitos. O universo do último exemplo acima contém apenas um indivíduo (mas isto já é o suficiente). Para resumir, os únicos conjuntos que não aceitaremos como universo de uma estrutura são o conjunto vazio $\varnothing$ e os conjuntos infinitos não-enumeráveis.[1]

Fixado um universo, o próximo passo é dizer como interpretar as expressões básicas de uma linguagem com respeito a ele, ou seja, como dar a elas um valor semântico. Isso é feito através de uma *função interpretação* $I_{\mathfrak{A}}$ que associa às constantes não-lógicas de uma linguagem $\mathcal{L}$ certas coisas na estrutura $\mathfrak{A}$. Note que já temos, então, dois elementos em uma estrutura: um domínio de entidades (universo), uma função interpretação. Mais precisamente, podemos definir uma estrutura $\mathfrak{A}$ para uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ como um par ordenado $\langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle$, em que A, o universo, é um conjunto não-vazio e contável e $I_{\mathfrak{A}}$ é uma função interpretação, cujas características vamos especificar logo em seguida. (Para simplificar, vamos escrever

[1] Aceitar que o universo de uma estrutura possa ser vazio caracteriza outros sistemas de lógica, diferentes da lógica clássica, chamados de *lógicas livres*. Ainda a esse respeito, cabe mencionar que alguns autores admitem conjuntos não-enumeráveis, ou até mesmo *classes próprias* (que não são conjuntos) como universos de estrutura, o que não faremos aqui.

simplesmente I para a função interpretação, em vez de $I_{\mathfrak{A}}$, por exemplo.)

Mas antes de dar definições rigorosas para tudo, vamos ver como as coisas funcionam. Suponha que temos a seguinte linguagem $\mathcal{L} = \{a, b, c, d, R, M, C, H, G\}$, em que G é um predicado binário, e os demais, unários. Seja, agora, $\mathfrak{A}$ uma estrutura com um universo A, tal que A é algum subconjunto dos seres humanos, por exemplo, o conjunto de todos os meus sobrinhos e sobrinhas:

$A = \{$Ana Maria, Conrado, Dorothee, Elisa, Felipe, Fernando, Gabriela, Juliana, Leila, Mariana, Sebastian, Veronika$\}$.

Esse é nosso domínio de entidades: ele contém doze indivíduos. Para termos uma idéia melhor, podemos desenhar algo como a figura 10.1, em que A é um retângulo em cujo interior se encontram os indivíduos (representados por seus nomes, claro).

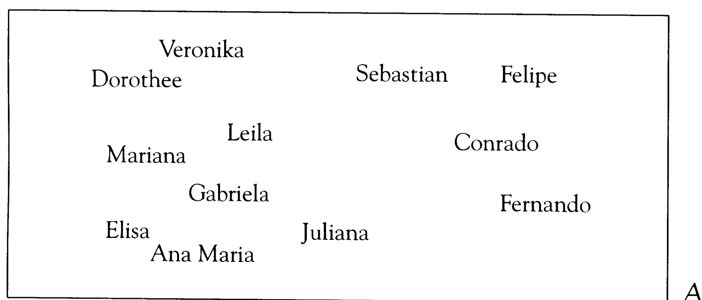


FIGURA 10.1 — O universo de $\mathfrak{A}$.

Agora podemos caracterizar a função interpretação I. Comecemos pelas constantes individuais: elas funcionam como nomes; logo, a elas devemos associar indivíduos. Sejam, então, Ana Maria, Juliana, Sebastian e Felipe os indivíduos associados por I às constantes a, b, c e d, respectivamente. Podemos escrever isso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I(a) &= \text{Ana Maria,} \\ I(b) &= \text{Juliana,} \\ I(c) &= \text{Sebastian,} \\ I(d) &= \text{Felipe,} \end{aligned}$$

e representamos isso na figura 10.2.

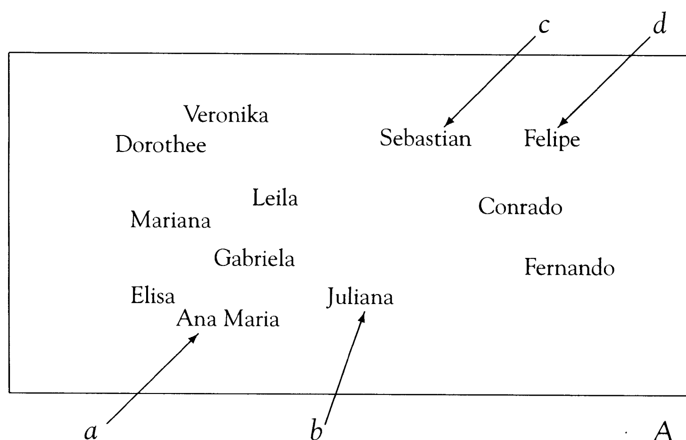


FIGURA 10.2 — As constantes interpretadas.

É claro que, sendo I uma função, ela não pode atribuir à *mesma* constante dois ou mais indivíduos. Por outro lado, não há problema se duas ou mais constantes tiverem o mesmo valor semântico, isto é, se a elas for associado o mesmo indivíduo. Por exemplo, seria possível ter $I(a) = I(b) =$ Ana Maria. Note ainda que oito indivíduos não tiveram associada a eles nenhuma constante — o que seria de esperar, uma vez que nossa linguagem contém apenas quatro constantes. Mas isso não constitui nenhum problema. (Bem... quase nenhum, como veremos depois.)

Tendo interpretado as constantes individuais, precisamos dar um valor semântico a cada símbolo de predicado. Comecemos pelos predicados unários. Em nossa interpretação informal, ao especificar a linguagem, os símbolos R, M, C, e H poderiam estar associados às propriedades 'x é um rapaz', 'x é uma moça', 'x mora em Campinas' e 'x mora em Heidelberg', respectivamente. Mas precisamos associar a eles, na interpretação formal, alguma coisa baseada na estrutura $\mathfrak{A}$. E o mecanismo é simples: a cada *símbolo de propriedade* vamos associar um *subconjunto do universo* A. (Lembre-se de que uma propriedade pode ser especificada pelo conjunto dos indivíduos que a possuem.) Por exemplo, a propriedade 'x é um rapaz' define o subconjunto de A

formado pelos rapazes: $\{x \in A \mid x \text{ é um rapaz}\}$. Assim, a função interpretação I associa a R um certo subconjunto de A, que denotaremos por $I(R)$, e que é o conjunto

$$\{\text{Conrado}, \text{Felipe}, \text{Fernando}, \text{Sebastian}\}.$$

No caso geral, I associa a cada símbolo de propriedade **P** um subconjunto $I(\mathbf{P})$ de A. Isto é, $I(\mathbf{P}) \subseteq A$.

É importante observar aqui que o tipo de semântica que estamos fazendo, para o **CQC**, é uma semântica *extensional*. Ou seja, o significado das expressões está sendo definido por meio de suas extensões.

Voltemos ao nosso exemplo. Fazendo a interpretação corresponder à nossa interpretação informal dos símbolos, I poderia associar ao símbolo M o subconjunto de A formado pelas moças, e assim por diante. Então temos:

$$\begin{aligned}
I(R) &= \{\text{Conrado}, \text{Felipe}, \text{Fernando}, \text{Sebastian}\},\\
I(\text{M}) &= \{\text{Ana Maria}, \text{Dorothee}, \text{Juliana},\\
&\quad \text{Elisa}, \text{Leila}, \text{Gabriela}, \text{Mariana}, \text{Veronika}\},\\
I(\text{C}) &= \{\text{Leila}, \text{Gabriela}, \text{Mariana}\},\\
I(H) &= \{\text{Veronika}, \text{Dorothee}, \text{Sebastian}\}.
\end{aligned}$$

E podemos representar isso tudo na figura 10.3.

Note que a cada um dos símbolos de propriedade associamos realmente um subconjunto de A. Note ainda que não interessa se os elementos do universo associados a R — isto é, $I(R)$ — são realmente rapazes: nossa estrutura é uma interpretação formal; estamos simplesmente associando símbolos a conjuntos. Uma outra interpretação, digamos I_2, também baseada nesse universo A, poderia associar a R, por exemplo, o subconjunto de A formado por Felipe e Ana Maria. Isto é, $I_2(R) = \{\text{Felipe}, \text{Ana Maria}\}$. Que tenhamos associado informalmente ao símbolo R a propriedade 'x é um rapaz' no mundo real, e estejamos tentando refletir isto *nesta estrutura particular* $\mathfrak{A}$, é apenas uma das inúmeras possibilidades.

Bem, o que vimos acima dá conta do caso dos símbolos de propriedade. Mas como interpretar símbolos de relações? Fácil. Como você recorda (ou se não recorda, releia o capítulo 4), uma relação

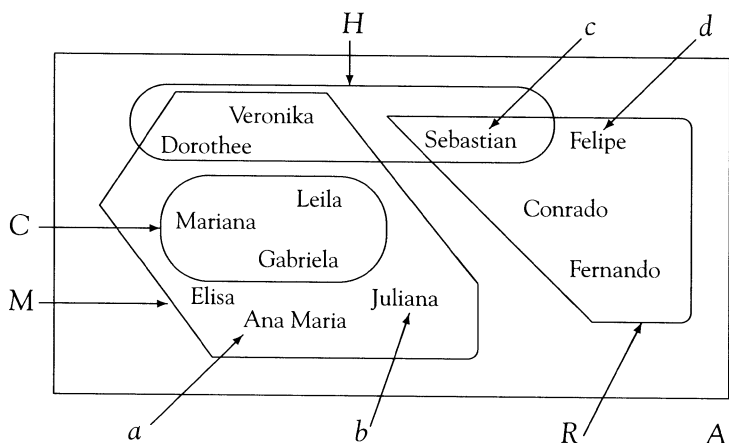


FIGURA 10.3 — Interpretando símbolos de propriedade.

binária, por exemplo, pode ser especificada por meio de um conjunto de *pares ordenados*. Assim, não é nenhuma surpresa que a função I vá associar a um símbolo de relação binária **R** uma relação $I(\mathbf{R}) \subseteq A^2$. (Lembre-se de que $A^2 = A \times A$.) Por exemplo, à relação 'x é pai de y' poderíamos associar o conjunto de todos os pares de indivíduos do universo tais que o primeiro é pai do segundo.

No nosso exemplo acima, o símbolo de relação binária G, que, informalmente, poderia simbolizar a relação 'x gosta de brincar com y', pode ser associado, digamos, ao seguinte conjunto de pares ordenados:

$$\{\langle \text{Elisa}, \text{Juliana} \rangle, \langle \text{Felipe}, \text{Conrado} \rangle, \langle \text{Leila}, \text{Gabriela} \rangle, \langle \text{Dorothee}, \text{Veronika} \rangle\}.$$

Em outras palavras, com esse conjunto de pares estamos simplesmente dando uma listagem de quem gosta de brincar com quem, na estrutura $\mathfrak{A}$. (No mundo real, todos eles gostam de brincar uns com os outros.)

A essas alturas, você provavelmente já está desconfiando de que, se tivermos um símbolo de predicado *ternário*, sua interpretação será um conjunto de *triplas ordenadas*, isto é, um subconjunto de A^3. E você tem toda razão. De modo similar, a símbolos de predicados

quaternários, a interpretação I associa um conjunto de quádruplas ordenadas, e assim por diante. Não é simples? No caso geral, um símbolo de predicado n-ário **R** será associado a um conjunto de ênuplas de indivíduos de A, isto é, $I(\mathbf{R}) \subseteq A^n$.

A estrutura descrita acima, contudo, é apenas uma das possíveis estruturas para essa nossa linguagem $\mathcal{L}$; podemos construir muitas e muitas outras. Por exemplo, podemos ter uma estrutura $\mathfrak{B}$ cujo universo seja o conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, e tal que a função interpretação I seja como se segue:

$$\begin{array}{ll} I(a) = 1, & I(R) = \{1, 2\}, \\ I(b) = 2, & I(M) = \{2, 3\}, \\ I(c) = 3, & I(C) = \varnothing, \\ I(d) = 2, & I(H) = B, \\ & I(G) = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}. \end{array}$$

Como você vê, o universo dessa estrutura contém apenas os números 1, 2 e 3. A propósito, ainda que nossa interpretação intuitiva estivesse falando dos meus sobrinhos e sobrinhas, essa estrutura $\mathfrak{B}$ está perfeitamente bem construída, pois temos um universo e uma interpretação. Note ainda que às constantes b e d foi associado um mesmo indivíduo, o número 2. Como mencionei, não há problema nenhum nisso; é como se b e d fossem dois nomes diferentes do número 2. O que não se pode fazer, repito, é associar, à mesma constante, dois ou mais indivíduos na estrutura — caso em que J não seria uma função, e a intepretação tem que ser uma função.

Você talvez esteja agora se perguntando se $I(C) = \varnothing$ é aceitável. Mais uma vez, não há problema: $\varnothing$ é um subconjunto de B (o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto). Lembre-se de que o *universo* da estrutura não pode ser vazio; quanto aos símbolos de predicados, eventualmente sua interpretação pode ser o conjunto vazio: não há ninguém no universo com uma certa propriedade, ou não há indivíduos numa tal relação etc. (No mundo real, por exemplo, o conjunto de indivíduos que têm a propriedade 'x é um centauro' é o conjunto vazio.) De modo similar, não há nada de errado em que a interpretação de um símbolo de predicado seja o próprio universo: $I(H) = B$, como acima. Isso apenas quer dizer que todos os indivíduos têm a propriedade H.

Finalmente, temos de ver o que acontece com os predicados zero-ários, isto é, as letras sentenciais. A única coisa que podemos dizer deles, em termos de significado, é que são ou verdadeiros ou falsos. Lembre-se de que as letras sentenciais são usadas, por exemplo, para representar sentenças como 'Chove' ou 'Faz frio'. Imaginando uma estrutura como uma situação, o que podemos dizer a esse respeito é que, nessa situação, ou chove, ou não. Assim, a sentença 'Chove' será verdadeira ou falsa nessa estrutura. Continuando a usar os valores de verdade **V** e **F** introduzidos no capítulo anterior, definimos que, a cada símbolo sentencial S, a função I associa um valor de verdade $I(S)$. Como existem dois valores de verdade, **V** e **F**, temos que, ou $I(S) = \mathbf{V}$, ou $I(S) = \mathbf{F}$.

Exercício 10.1 Construa duas outras estruturas para a linguagem $\mathcal{L}$ acima, usando como universo: (a) o conjunto das capitais de estados do Brasil; (b) o conjunto dos números naturais.

Exercício 10.2 Quantas estruturas você acha que podemos construir para a linguagem $\mathcal{L}$ acima?

10.3 Verdade

Tendo caracterizado as estruturas do modo como fizemos na seção anterior, estamos bem perto de poder definir verdade para as fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$. Basicamente, a coisa é simples: uma fórmula α será verdadeira em uma estrutura $\mathfrak{A}$ se o valor semântico de α for **V**; α será falsa em $\mathfrak{A}$ se tiver o valor semântico **F**. O que precisamos fazer, claro, é dizer como determinar o valor de verdade de uma fórmula qualquer em uma estrutura.

Para isso, porém, ainda nos falta alguma coisa. Se a idéia é determinar o valor semântico de uma fórmula (o valor de verdade) a partir do valor semântico de seus componentes, isso funciona no caso de fórmulas moleculares e de fórmulas atômicas como Pa, para as quais já temos os valores de P e de a numa estrutura — suas interpretações, respectivamente, $I(P)$ e $I(a)$. (Já veremos como fazer isso, mas você deve concordar com que podemos.) Porém, que dizer com relação a uma fórmula como $\forall xPx$? De acordo com o princípio de

composicionalidade, o valor dessa fórmula deveria ser obtido a partir do valor semântico de Px, e o valor desta, a partir dos valores de P e de x. Porém, aqui temos uma variável envolvida, e ainda não dissemos qual é o valor semântico de uma variável.

Obviamente, as variáveis funcionam sintaticamente como as constantes, isto é, elas aparecem nas mesmas posições, numa fórmula, onde uma constante estaria. Se você quiser, podemos relembrar mais uma vez aquela analogia e dizer que as variáveis funcionam de certa forma como pronomes. De qualquer maneira, o valor de uma variável deveria ser um indivíduo do universo da estrutura.

Há várias maneiras de tratar essa questão. Uma delas é associar, como no caso das constantes individuais, a cada variável, um indivíduo no universo. Mas não é o que farei aqui; prefiro usar uma outra alternativa, que, creio, é didaticamente mais simples, e que consiste no seguinte: para calcular o valor de uma fórmula com variáveis, fazemos simplesmente a substituição das variáveis por certas coisas como constantes individuais (cujo valor semântico já foi dado pela interpretação). Isso também envolve começar tratando apenas de fórmulas fechadas, e deixando para especificar a verdade de uma fórmula aberta posteriormente.

Vamos começar, portanto, tratando apenas das sentenças, isto é, das fórmulas fechadas. No restante desta seção, sempre que falarmos em 'fórmula', estaremos nos referindo a fórmulas fechadas, a menos que o contrário seja dito explicitamente.

10.3.1 Fórmulas atômicas

Vamos continuar considerando a linguagem $\mathcal{L}$, e a estrutura $\mathfrak{A}$ (cujo universo são meus sobrinhos e sobrinhas). Tendo essa estrutura, fica fácil ver se uma fórmula atômica de $\mathcal{L}$, como Mb, recebe o valor **V** ou não: ela terá o valor **V** se o indivíduo associado por I à constante b — isto é, $I(b)$, que é Juliana — pertencer ao subconjunto de A associado por I ao símbolo de predicado M — $I(M)$, que é o conjunto

$$\{\text{Ana Maria, Juliana, Elisa, Leila, Gabriela,}\\ \text{Mariana, Dorothee, Veronika}\}.$$

Podemos indicar isso especificando as condições de verdade dessa

fórmula para a estrutura $\mathfrak{A}$:

$$Mb \text{ é verdadeira} \quad \text{sse} \quad I(b) \in I(M).$$

Como podemos verificar na figura 10.3, temos, de fato, $I(b) \in I(M)$. Logo, podemos dizer que Mb recebe o valor de verdade **V** na estrutura $\mathfrak{A}$ (e, assim, que Mb é verdadeira na estrutura $\mathfrak{A}$). Vamos escrever isso da seguinte forma:

$$\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}.$$

Resumindo, as condições de verdade da fórmula Mb, então, podem ser assim especificadas:

$$\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad I(b) \in I(M).$$

Vejamos agora um outro exemplo de fórmula atômica, digamos, a fórmula Rb. Essa fórmula terá o valor **V** em $\mathfrak{A}$ se o indivíduo associado a b — $I(b)$, que é Juliana — pertencer ao conjunto $I(R)$, isto é, se $I(b) \in I(R)$. Ou seja:

$$\mathfrak{A}(Rb) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad I(b) \in I(R).$$

Porém, isso *não* acontece: $I(b) \notin I(R)$. Nesse caso, relativamente a $\mathfrak{A}$, Rb é uma fórmula que não é verdadeira; logo, é falsa. Podemos escrever isso da seguinte maneira:

$$\mathfrak{A}(Rb) = \mathbf{F}.$$

Note que o valor de verdade de uma fórmula é obtido sempre com relação a alguma estrutura. De fato, $\mathfrak{A}(Rb) = \mathbf{F}$, mas, considerando a estrutura $\mathfrak{B}$, apresentada na seção anterior, vemos que $I(b) = 2$, $I(R) = \{1, 2\}$, e que $2 \in \{1, 2\}$. Logo, $\mathfrak{B}(Rb) = \mathbf{V}$, ou seja, Rb é verdadeira em $\mathfrak{B}$. Resumindo, uma fórmula recebe um valor **V** ou **F** sempre com relação a uma certa estrutura: *verdade* é sempre *verdade em uma estrutura*.

Vamos ver agora uma fórmula que contém um símbolo de relação binária, como Gda. De acordo com nossa interpretação informal, ela é verdadeira se Felipe gosta de brincar com Ana Maria. Na estrutura

$\mathfrak{A}$, *Gda* recebe o valor **V** se o indivíduo associado por *I* à constante *d* — *I*(*d*) — está na relação associada por *I* ao predicado G — *I*(G) — com o indivíduo associado por *I* à constante *a* — *I*(*a*). Como relações são especificadas por conjuntos de pares de indivíduos, basta verificar se o par $\langle I(d), I(a)\rangle$ pertence ou não a *I*(G). Assim, temos o seguinte:

$$\mathfrak{A}(Gda) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \langle I(d), I(a)\rangle \in I(G).$$

Como $I(d) =$ Felipe, e $I(a) =$ Ana Maria, e, como podemos também verificar, o par $\langle$Felipe, Ana Maria$\rangle \notin I(G)$, temos $\mathfrak{A}(Gda) = \mathbf{F}$; isto é, *Gda* é falsa em $\mathfrak{A}$. Por outro lado, considerando mais uma vez a estrutura $\mathfrak{B}$, temos que $I(d) = 2$, $I(a) = 1$, e $I(G) = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$. Logo, $\langle 2,1\rangle \in I(G)$, e, portanto, $\mathfrak{B}(Gda) = \mathbf{V}$.

Resumindo, no caso de fórmulas atômicas que não sejam predicados zero-ários, determinar o valor de verdade consiste em verificar se um determinado indivíduo (ou par de indivíduos, ou tripla de indivíduos etc.) pertence a um determinado conjunto. No caso de uma letra sentencial S, precisamos apenas verificar se o valor de S é **V** ou **F**. Dito de outra forma, $\mathfrak{A}(S) = \mathbf{V}$ se e somente se $I(S) = \mathbf{V}$.

Exercício 10.3 Determine o valor das fórmulas abaixo na estrutura $\mathfrak{A}$ que estamos considerando. Faça depois o mesmo com relação à estrutura $\mathfrak{B}$.

(a)	*Ra*	(d)	*Hc*	(g)	*Gab*
(b)	*Rc*	(e)	*Cb*	(h)	*Gba*
(c)	*Mb*	(f)	*Rd*	(i)	*Gcc*

10.3.2 Fórmulas moleculares

O caso das fórmulas moleculares é simples, e já tratamos dele no capítulo anterior: basta usar as tabelas básicas dos operadores para determinar o valor de uma fórmula a partir de suas subfórmulas. Por exemplo, a fórmula $Gda \vee \neg Rb$ recebe o valor **V** na estrutura $\mathfrak{A}$ se uma das duas fórmulas, ou *Gda* ou $\neg Rb$, tiver o valor **V**. Como vimos há pouco, $\mathfrak{A}(Gda) = \mathbf{F}$ e $\mathfrak{A}(Rb) = \mathbf{F}$, de onde se segue que $\mathfrak{A}(\neg Rb) = \mathbf{V}$. Logo, $\mathfrak{A}(Gda \vee \neg Rb) = \mathbf{V}$, ou seja, $Gda \vee \neg Rb$ é verdadeira na estrutura $\mathfrak{A}$.

Como você vê, uma estrutura funciona exatamente como uma valoração. A diferença é que, numa valoração, o valor de uma fórmula

atômica, por exemplo, é dado arbitrariamente; numa estrutura, esse valor é determinado a partir do valor semântico dos símbolos envolvidos. O cálculo do valor de uma fórmula molecular, por outro lado, continua sendo feito da mesma maneira.

Exercício 10.4 Usando os valores obtidos para as fórmulas atômicas do exercício anterior, determine o valor das fórmulas abaixo na estrutura $\mathfrak{A}$ que estamos considerando. Faça o mesmo com relação a $\mathfrak{B}$.

(a)	$\neg Ra$	(d)	$Ca \to (Cb \lor \neg Ra)$
(b)	$Rc \land Mb$	(e)	$(Cb \land Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \lor \neg Mb)$
(c)	$\neg\neg Mb$	(f)	$\neg(Gcc \to Gab)$

10.3.3 Fórmulas gerais

Vamos agora examinar a situação das fórmulas gerais. Tomemos um exemplo, digamos, $\exists x Mx$ (o que informalmente significaria que alguém é uma moça). Quando podemos dizer que essa fórmula é verdadeira em $\mathfrak{A}$? Obviamente, se algum elemento do universo A tiver a propriedade associada a M; isto é, se algum indivíduo em A pertencer ao conjunto $I(M)$. No caso, temos, por exemplo, Juliana, Leila, Elisa etc. como elementos de $I(M)$, e então podemos concluir que $\mathfrak{A}(\exists x Mx) = \mathbf{V}$.

Porém, um caso como $\exists x Mx$ é bastante simples, pois M é um símbolo de propriedade e fica fácil examinar o conjunto $I(M)$ e ver se ele tem algum elemento ou não. Mas imagine que você tivesse que decidir qual o valor da fórmula $\exists x \forall y \forall z((Gyx \land Gyz) \to (Rx \lor Mz))$ em $\mathfrak{A}$: como não há desenhado na figura 10.3 um conjunto correspondente a $\forall y \forall z((Gyx \land Gyz) \to (Rx \lor Mz))$, temos que encontrar outra maneira de fazer isso.

Voltemos a $\exists x Mx$. A idéia é poder determinar a verdade dessa fórmula a partir de uma de suas partes mais simples. Assim como o valor de, digamos, $\neg Rb$ é calculado a partir do valor de Rb, poderíamos tentar determinar o valor de $\exists x Mx$ partindo do valor de Mx. Contudo, Mx é uma fórmula *aberta*, e até agora vínhamos caracterizando a verdade de fórmulas fechadas. Assim, *não podemos* determinar o valor de verdade de $\exists x Mx$ a partir do valor de Mx simplesmente.

Uma solução — aquela que vamos empregar aqui — é trocar a variável x por alguma coisa que dê como resultado uma fórmula fechada — e os candidatos naturais são, é claro, as constantes individuais. Em outras palavras, a idéia é que $\exists xMx$ seja verdadeira se Mc for verdadeira *para alguma* constante **c** que colocamos no lugar de x. Em $\mathfrak{A}$, Mc pode ser dita verdadeira de Juliana, isto é, quando a constante **c**, pela qual a variável x foi substituída, for a constante que denota Juliana, que é b. Ou seja, Mc é verdadeira quando $\mathbf{c} = b$. E como é verdade que, para o indivíduo $I(b)$, Mb é verdadeira em $\mathfrak{A}$, podemos finalmente dizer que $\mathfrak{A}(\exists xMx) = \mathbf{V}$.

Note que partimos do fato de que $I(b) \in I(M)$ para a verdade da fórmula Mb, e então para a verdade de $\exists xMx$. Isso nos dá uma pista para definir a verdade de uma fórmula existencial a partir de uma de suas partes mais simples: $\exists xMx$ recebe o valor **V** em $\mathfrak{A}$ se, ao substituirmos o x em Mx por alguma constante, como b por exemplo, a fórmula resultante Mb tiver o valor **V**. Assim, poderíamos afirmar *provisoriamente* que:

$$\mathfrak{A}(\exists xMx) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{A}(Mx[x/c]) = \mathbf{V}, \text{ para alguma constante } \mathbf{c}. \quad (1)$$

Vejamos algumas explicações para isso, começando pela notação. Seja α uma fórmula, **x** uma variável e **c** uma constante qualquer. Denotaremos por $\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]$ — chamada de uma *instância* de α — o resultado de substituir todas as *ocorrências livres* da variável **x** em α pela constante **c**. Por exemplo, se $\alpha = \forall y((Py \land Lzy) \to Tz)$, $\mathbf{x} = z$, e $\mathbf{c} = a$, temos que $\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}] = \forall y((Py \land Lay) \to Ta)$. Ou seja, toda vez que z ocorre livre em α, nós a trocamos por a. No caso acima, $Mx[x/c]$ será Mc, para alguma constante **c**.

A restrição com relação à troca apenas de ocorrências livres é que, pela nossa definição, uma expressão como $\forall x(Px \to \exists xQx)$ é uma fórmula bem-formada. Agora, é claro que a única ocorrência de x quantificada por $\forall x$ é aquela na fórmula Px, pois $\exists xQx$ *já era fechada* ao formarmos $\forall x(Px \to \exists xQx)$. Assim, para dar um exemplo, $(Px \to \exists xQx)[x/a]$, o resultado de substituir todas as ocorrências livres de x em $Px \to \exists xQx$ pela constante a é a fórmula $Pa \to \exists xQx$. E, de forma similar, $Rab[x/c]$ — o resultado de substituir as ocorrências livres de x em Rab por c — é a própria Rab.

Voltando a discutir o valor de verdade de $\exists xMx$, o que a equação (1) nos diz é que devemos verificar a verdade de Mc, para alguma constante c. Como temos quatro constantes na linguagem, a saber, a, b, c, e d, isso nos deixa com quatro casos:

$$\mathfrak{A}(\exists xMx) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{A}(Ma) = \mathbf{V}, \\ \text{ou } \mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}, \\ \text{ou } \mathfrak{A}(Mc) = \mathbf{V}, \\ \text{ou } \mathfrak{A}(Md) = \mathbf{V}. \end{array}$$

E, uma vez que um desses casos se verifica — $\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}$ —, segue-se que $\mathfrak{A}(\exists xMx) = \mathbf{V}$, como havíamos desconfiado desde o começo.

Até aí, tudo bem, mas infelizmente a coisa não é tão simples assim. Vamos tomar um outro exemplo: 'Alguém mora em Campinas', o que estamos representando por $\exists xCx$. Bem, essa fórmula será verdadeira em $\mathfrak{A}$ se existir algum indivíduo em A do qual é verdadeiro que ele ou ela mora em Campinas. Isto é, algum indivíduo de A deve pertencer a $I(C)$. De modo similar ao caso (1) acima, deveríamos ter então que:

$$\mathfrak{A}(\exists xCx) = \mathbf{V} \;\; \text{sse} \;\; \mathfrak{A}(Cc) = \mathbf{V}, \text{ para alguma constante } \mathbf{c}. \qquad (2)$$

Mas aqui temos um problema. Nossa linguagem $\mathcal{L}$ tem apenas quatro constantes, e é fácil de ver que:

$$\mathfrak{A}(Ca) = \mathbf{F}, \quad \mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{F}, \quad \mathfrak{A}(Cc) = \mathbf{F}, \quad \mathfrak{A}(Cd) = \mathbf{F}.$$

Ou seja, nem Ana Maria, nem Juliana, nem Sebastian, nem Felipe (as interpretações de nossas constantes) pertencem ao conjunto $I(C)$. Agora, inspecionando visualmente a figura 10.3, vemos que de fato *há* alguns indivíduos — a saber, Leila, Gabriela e Mariana — que pertencem a $I(C)$. Contudo, não temos constantes que denotem esses indivíduos. E, se não dispomos de uma constante, o que vamos colocar no lugar da variável x na fórmula Cx para obter uma fórmula fechada? Obviamente não é possível trocar x por Leila: teríamos de ter um *nome* para ela. E agora?

A solução é óbvia: basta acrescentar à nossa linguagem $\mathcal{L}$ um *nome* para cada indivíduo em A ao qual não esteja associada nenhuma

constante. Ao fazer isso estamos criando uma nova linguagem, uma expansão de $\mathcal{L}$ — vamos chamá-la de $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ — que, claro, consiste dos símbolos de $\mathcal{L}$ acrescidos dos nomes. Mas que nomes serão esses? Bem, como nossa linguagem geral de primeira ordem dispõe de um conjunto infinito de constantes, os nomes serão simplesmente constantes novas que ainda não ocorriam em $\mathcal{L}$.[2] Por exemplo, em $\mathcal{L}$ temos apenas as constantes a, b, c, e d, e precisamos, portanto, de oito nomes adicionais, uma vez que temos doze indivíduos em A. Poderíamos, digamos, usar as próximas oito letras minúsculas, começando por e e terminando em l. Ou poderíamos simplesmente usar $e_1, e_2, \ldots, e_8$. É claro que, para indivíduos diferentes, diferentes nomes serão escolhidos. (Só não precisaríamos de nomes, claro, no caso particular de uma estrutura na qual todo indivíduo é a interpretação de alguma constante. Mas isso é a exceção, e não a regra.)

Tendo construído a linguagem $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, é claro que precisamos também acrescentar à interpretação I da estrutura $\mathfrak{A}$ o valor semântico dos nomes. Isso, obviamente, gera uma nova estrutura, uma vez que a interpretação foi alterada. Para ser preciso, deveríamos ter agora uma estrutura $\mathfrak{A}' = \langle A, I_{\mathfrak{A}'}\rangle$. Por abuso de linguagem, contudo, vamos simplificar as coisas e continuar falando da estrutura $\mathfrak{A}$ e da interpretação I (que, recorde, inclui agora o significado dos nomes que acrescentamos à linguagem).

Enfim, quaisquer que tenham sido as novas constantes introduzidas como nomes, agora podemos falar de Leila: digamos que o nome de Leila seja k, ou seja, temos agora $I(k) =$ Leila. É fácil então verificar que a fórmula existencial $\exists xCx$, como suspeitávamos, é mesmo verdadeira em $\mathfrak{A}$. Basta modificar (2) acima para:

$$\mathfrak{A}(\exists xCx) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(C\mathbf{i}) = \mathbf{V}, \text{ para algum } \mathbf{i}, \tag{3}$$

onde **i** é ou uma *constante individual*, ou o *nome* de um indivíduo em A. Como $\mathfrak{A}(Ck) = \mathbf{V}$ (pois Leila está no conjunto $I(C)$), concluímos que $\mathfrak{A}(\exists xCx) = \mathbf{V}$.

Para terminar esse passeio informal por estruturas e verdade, precisamos ver ainda como ficam as fórmulas universais: por exemplo,

[2]Isso exige, porém, que os universos de estruturas sejam contáveis, uma vez que temos um conjunto enumerável de constantes. Há outras maneiras de usar nomes, mesmo tendo universos não-enumeráveis, mas não vamos nos ocupar disso aqui.

$\forall xRx$. Intuitivamente, essa fórmula será verdadeira em $\mathfrak{A}$ se *todo* indivíduo em A tiver a propriedade R. Podemos escrever isso da seguinte maneira:

$$\mathfrak{A}(\forall xRx) = \mathsf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(R\mathbf{i}) = \mathsf{V}, \text{ para todo } \mathbf{i}. \tag{4}$$

Mas como em $\mathfrak{A}$ isso não ocorre — por exemplo, $\mathfrak{A}(Rk) = \mathsf{F}$, pois $I(k)$, que é Leila, não pertence a $I(R)$ —, concluímos que $\mathfrak{A}(\forall xMx) = \mathsf{F}$. E você pode verificar na figura 10.3 que, de fato, nem todos os elementos do universo A estão no conjunto $I(R)$.

10.4 Definição de verdade

Vamos definir agora rigorosamente o que estivemos vendo de um modo mais ou menos informal.[3] Vamos tratar de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ qualquer.

Definição 10.1 *Uma estrutura $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$ é um par ordenado $\langle A, I\rangle$, onde A é um conjunto não-vazio e contável, e I é uma função tal que:*

(a) *a toda constante individual* $\mathbf{c}$ *de* $\mathcal{L}$, *I associa um indivíduo* $I(\mathbf{c}) \in A$;

(b) *a cada letra sentencial* $\mathbf{S}$ *de* $\mathcal{L}$, *I associa um valor de verdade* $I(\mathbf{S}) \in \{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$;

(c) *a cada símbolo de predicado n-ário* $\mathbf{P}$ *de* $\mathcal{L}$, $n > 0$, *I associa um subconjunto* $I(\mathbf{P}) \subseteq A^n$.

Dada uma estrutura $\mathfrak{A}$ para uma linguagem $\mathcal{L}$, formamos a linguagem $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, acrescentando a $\mathcal{L}$ nomes para todos os indivíduos de $\mathfrak{A}$ aos quais não foi associada por I uma constante, e estendendo a interpretação I para associar a cada nome o indivíduo de quem ele é o nome. Fica entendido que indivíduos diferentes recebem, claro, nomes diferentes.

---

[3] A definição de verdade que apresento é uma variante da definição apresentada originalmente por Alfred Tarski, em 1931 (ver Tarski, 1983). Na versão de Tarski, ao invés de substituir variáveis por constantes, recorre-se primeiro à noção de *satisfação* de uma fórmula, mesmo uma fórmula aberta, por uma seqüência infinita de indivíduos, para então definir verdade.

Podemos especificar agora como obter o valor de verdade de uma fórmula fechada α de $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ em $\mathfrak{A}$. Nessa definição, note que $\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{i}]$ denota o resultado de substituir as ocorrências livres da variável **x** em α pelo *nome* ou *constante* **i**. Vamos utilizar o termo *parâmetro* para nos referirmos às coisas que são ou constantes individuais, ou nomes.

Definição 10.2 *Seja então $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, $\mathfrak{A}$ uma estrutura para $\mathcal{L}$.*

(a) $\mathfrak{A}(\mathrm{S}) = \mathsf{V}$ *sse* $I(\mathrm{S}) = \mathsf{V}$, *onde* S *é um símbolo de predicado zero-ário;*
(b) $\mathfrak{A}(\mathbf{Pt}_1 \ldots \mathbf{t}_n) = \mathsf{V}$ *sse* $\langle I(\mathbf{t}_1), \ldots, I(\mathbf{t}_n)\rangle \in I(\mathbf{P})$, *onde* **P** *é um símbolo de predicado n-ário, para* $n > 0$, *e* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ *são parâmetros;*
(c) $\mathfrak{A}(\neg\alpha) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathsf{F}$;
(d) $\mathfrak{A}(\alpha \vee \beta) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathsf{V}$ *ou* $\mathfrak{A}(\beta) = \mathsf{V}$;
(e) $\mathfrak{A}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta) = \mathsf{V}$;
(f) $\mathfrak{A}(\alpha \rightarrow \beta) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathsf{F}$ *ou* $\mathfrak{A}(\beta) = \mathsf{V}$;
(g) $\mathfrak{A}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta)$;
(h) $\mathfrak{A}(\forall\mathbf{x}\alpha) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{i}]) = \mathsf{V}$, *para todo parâmetro* **i**;
(i) $\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\alpha) = \mathsf{V}$ *sse* $\mathfrak{A}(\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{i}]) = \mathsf{V}$, *para algum parâmetro* **i**.

Alguns comentários. As cláusulas (a) e (b) especificam as condições de verdade para as fórmulas atômicas. As cláusulas (c)–(g), se você comparar, são idênticas às cláusulas correspondentes da definição de valoração do capítulo anterior: a única diferença é que trocamos, por exemplo, '$v(\neg\alpha)$' por '$\mathfrak{A}(\neg\alpha)$'.

As duas últimas cláusulas, (h) e (i), especificam as condições de verdade para as fórmulas gerais. Ou seja, dizem em que condições tais fórmulas são verdadeiras. Para ilustrar, eis aqui também as condições em que tais fórmulas são falsas:

$\mathfrak{A}(\forall\mathbf{x}\alpha) = \mathsf{F}$ sse $\mathfrak{A}(\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{i}]) = \mathsf{F}$, para algum parâmetro **i**;
$\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\alpha) = \mathsf{F}$ sse $\mathfrak{A}(\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{i}]) = \mathsf{F}$, para todo parâmetro **i**.

Essas condições, claro, seguem-se de (h) e (i), e são mais ou menos óbvias. Por exemplo, se $\forall xPx$ é verdadeira sse $P\mathbf{i}$ é verdadeira para todo **i**, é claro que $\forall xPx$ será falsa se $P\mathbf{i}$ *não* for verdadeira para todo **i**. Ou seja, se for falsa para *algum* **i**.

O que fizemos, então, na definição acima, foi especificar como obter o valor de verdade de uma *sentença* (i.e., uma fórmula fechada) α em uma estrutura. Como ficam, porém, as fórmulas abertas? Considere a fórmula Gxa, da linguagem $\mathcal{L}$ que vimos usando como exemplo. Na interpretação informal de G, isso significa que x gosta de brincar com Ana Maria. E agora, Gxa é verdadeira ou falsa em $\mathfrak{A}$? Não podemos dizer, pois não sabemos qual o sentido dessa afirmação: há algum x que gosta de brincar com Ana Maria? Todos os x gostam de brincar com Ana Maria? Algum x específico? Fórmulas abertas, em princípio, não são verdadeiras nem falsas. Mas podemos atribuir a elas também um valor de verdade, como veremos em seguida.

Seja α uma fórmula aberta tal que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sejam todas as suas variáveis livres. Dizemos, então, que $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \alpha$ é o *fecho* de α. Note que o fecho de α é agora uma fórmula fechada (daí o nome), pois todas as variáveis livres foram universalmente quantificadas. Vejamos alguns exemplos (à esquerda você tem as fórmulas abertas; à direita, seus fechos):

$$\begin{array}{rcl} \neg Gxx & — & \forall x \neg Gxx \\ Cx \land Hy & — & \forall x \forall y (Cx \land Hy) \\ Gxy \to \neg Gzw & — & \forall x \forall y \forall z \forall w (Gxy \to \neg Gzw) \end{array}$$

Seja agora $\mathfrak{A}$ uma estrutura, e α uma fórmula aberta cujas variáveis livres são $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$: dizemos que

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \alpha) = \mathbf{V}.$$

Assim, uma fórmula aberta recebe o valor **V** em uma estrutura se e somente se seu fecho tem o valor **V**. (Obviamente, se o fecho de α tem **F**, α também recebe **F**.)

Finalmente, agora que vimos como atribuir um valor de verdade para toda e qualquer fórmula, dizemos que uma fórmula α qualquer é verdadeira numa estrutura $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$. Se isso parece estranho ou óbvio para você, recorde que **V** e **F** são apenas dois objetos distintos. Poderíamos estar usando 1 e 0, ou o Sol e a Lua, e uma fórmula poderia ser dita verdadeira numa estrutura se seu valor fosse 1, ou o Sol etc.

Antes de passarmos aos exercícios, vamos considerar um exemplo final de estrutura, e verificar se certas fórmulas são verdadeiras ou falsas nela.

Seja $\mathcal{L}_1$ a linguagem $\{a, b, P, Q, M\}$, e seja $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$ uma estrutura para $\mathcal{L}_1$ onde $\mathbb{N}$, claro, é o conjunto dos números naturais (ou seja, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) e a função interpretação I é como segue:

$$\begin{aligned} I(a) &= 5, \\ I(b) &= 8, \\ I(P) &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}, \\ I(Q) &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}, \\ I(M) &= \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}. \end{aligned}$$

Suponhamos que eu pedisse a você para determinar se as fórmulas abaixo são verdadeiras ou falsas em $\mathfrak{N}$:

(a)	Qa	(d)	$\forall x Px$
(b)	$\neg Pa \to (Mab \wedge Pb)$	(e)	$\exists x \forall y Mxy$
(c)	$\exists x Px$	(f)	$Px \vee Qx$

Obviamente, as fórmulas acima serão verdadeiras em $\mathfrak{N}$ se tiverem o valor **V**; portanto, precisamos determinar o valor de verdade delas. Note, contudo, que temos apenas duas constantes na linguagem $\mathcal{L}_1$, e o universo da estrutura é um conjunto infinito. Precisamos, claro, dar nomes a todos esses indivíduos. Como proceder?

Bem, podemos escolher a letra minúscula c, associar c a 0 e dizer que, para cada número natural $n > 0$ (exceto 5 e 8, que já têm uma constante), $I(c_n) = n$. Ou seja:

$$\begin{aligned} I(c) &= 0, \\ I(c_1) &= 1, \\ I(c_2) &= 2, \\ I(c_3) &= 3, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Como temos um suprimento infinito de constantes, isto funciona. Por exemplo, o nome do número 1034 é 'c_{1034}'.

Comecemos então com a primeira fórmula, Qa. Pela nossa definição de verdade, temos que

$$\mathfrak{N}(Qa) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad I(a) \in I(Q).$$

Agora, $I(a) = 5$, e como 5 é um número ímpar, $5 \in I(Q)$. Portanto, $\mathfrak{N}(Qa) = \mathbf{V}$.

Vamos ver o caso (b). Como esta é uma fórmula molecular, poderemos determinar seu valor de verdade se soubermos os valores de Pa, Mab e Pb, certo? Bem, como $I(a) = 5$, e $I(P)$ é o conjunto dos números naturais pares, é óbvio que $I(a) \notin I(P)$, e que, portanto, $\mathfrak{N}(Pa) = \mathbf{F}$. Por outro lado, $I(b) = 8$, e como 8 é par, $I(b) \in I(P)$, e $\mathfrak{N}(Pb) = \mathbf{V}$. Finalmente, precisamos determinar o valor de Mab. Pela definição de verdade, temos que

$$\mathfrak{N}(Mab) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \langle I(a), I(b) \rangle \in I(M)$$

ou, dito de outra maneira, Mab tem o valor $\mathbf{V}$ se o par $\langle 5, 8 \rangle \in I(M)$. Agora, $I(M)$ é a relação que se verifica entre dois números naturais quando o primeiro é menor que o segundo. Como de fato $5 < 8$, dizemos que $\mathfrak{N}(Mab) = \mathbf{V}$.

Muito bem, agora que sabemos o valor de verdade em $\mathfrak{N}$ das fórmulas atômicas que ocorrem em $\neg Pa \rightarrow (Mab \wedge Pb)$, podemos determinar o seu valor. Como $\mathfrak{N}(Pa) = \mathbf{F}$, pela tabelinha da negação vemos que $\mathfrak{N}(\neg Pa) = \mathbf{V}$. Por outro lado, como $\mathfrak{N}(Mab) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{N}(Pb) = \mathbf{V}$, concluímos que $\mathfrak{N}(Mab \wedge Pb) = \mathbf{V}$. Finalmente, $\mathfrak{N}(\neg Pa \rightarrow (Mab \wedge Pb)) = \mathbf{V}$, pois, pela tabela da implicação, se tanto o antecedente quanto o conseqüente de um condicional são verdadeiros, o condicional tem $\mathbf{V}$ como valor de verdade.

Vamos à fórmula $\exists x Px$. A definição de verdade nos diz o seguinte:

$$\mathfrak{N}(\exists x Px) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{N}(P\mathbf{i}) = \mathbf{V}, \text{ para algum parâmetro } \mathbf{i}.$$

A questão que se coloca, claro, é se podemos encontrar algum $\mathbf{i}$ tal que $I(\mathbf{i}) \in I(P)$. Uma das maneiras de fazer isso é percorrer sistematicamente o universo, testando cada indivíduo para ver se ele é um número par ou não. Nesse caso, temos sorte, pois já o primeiro indivíduo, 0, é um número par. Assim, como $I(c) \in I(P)$, podemos dizer que $\mathfrak{N}(Pc) = \mathbf{V}$, e que, portanto, $\mathfrak{N}(\exists x Px) = \mathbf{V}$.

Consideremos agora $\forall xPx$. Pela definição de verdade, temos o seguinte:

$$\mathfrak{N}(\forall xPx) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{N}(P\mathbf{i}) = \mathbf{V}, \text{ para todo parâmetro } \mathbf{i}.$$

A maneira de proceder nesse caso seria realmente a de testar todo parâmetro **i** e verificar se $P\mathbf{i}$ é verdadeira ou não. Vimos acima que $\mathfrak{N}(Pc) = \mathbf{V}$. Porém, você pode facilmente verificar que $\mathfrak{N}(Pc_1) = \mathbf{F}$, pois 1 não é um número par. Tendo já encontrado um indivíduo, c_1, tal que $\mathfrak{N}(Pc_1) = \mathbf{F}$, não precisamos ir adiante, e concluímos imediatamente que $\mathfrak{N}(\forall xPx) = \mathbf{F}$. Lembre-se de que, para uma fórmula universal ser verdadeira, ela tem que ser verdadeira para todos os indivíduos — o que não é o caso em questão.

Vamos agora considerar a fórmula $\exists x\forall yMxy$, que envolve dois quantificadores. Qual será o valor dela em $\mathfrak{N}$? Apliquemos a definição de verdade:

$$\mathfrak{N}(\exists x\forall yMxy) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{N}(\forall yMxy[x/\mathbf{i}]) = \mathbf{V}, \text{ para algum } \mathbf{i},$$

ou seja,

$$\mathfrak{N}(\exists x\forall yMxy) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{N}(\forall yM\mathbf{i}y) = \mathbf{V}, \text{ para algum } \mathbf{i}.$$

O que temos a fazer é ir testando os diferentes indivíduos e ver, se para algum deles, $\forall yM\mathbf{i}y$ é verdadeira. Comecemos pelo primeiro, c. Será que $\forall yMcy$ tem o valor **V** em $\mathfrak{N}$? Pela definição de verdade, temos:

$$\mathfrak{N}(\forall yMcy) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{N}(Mc\mathbf{j}) = \mathbf{V}, \text{ para todo parâmetro } \mathbf{j}.$$

E agora? Bem, temos que verificar se $Mc\mathbf{j}$ é verdadeira para cada parâmetro **j**. Por sorte, não precisaremos ficar infinitamente a testar isso, pois já com o primeiro deles isso não funciona. Seja $\mathbf{j} = c$. Obviamente, $\mathfrak{N}(Mcc) = \mathbf{F}$, pois o par $\langle 0, 0\rangle \notin I(M)$, isto é, é falso que $0 < 0$. Nesse caso, já não é verdade que $\forall yMcy$. Contudo, c foi apenas o primeiro dos parâmetros que consideramos — lembre-se de que estamos tentando estabelecer o valor de verdade em $\mathfrak{N}$ da fórmula $\forall yM\mathbf{i}y$, para algum **i**. O próximo candidato (já que substituir **i** por c não deu

certo) é c_1, que é o nome do número 1. Mas é claro que 1 não é menor que qualquer número natural: por exemplo, é falso que $1 < 0$, ou que $1 < 1$. Dessa forma, $\forall y M c_1 y$ também é falsa. E é óbvio que $\forall y M\mathbf{i}y$ será falsa para qualquer parâmetro **i** que possamos testar — nenhum número natural é menor que todos os números naturais. Assim, podemos concluir que $\mathfrak{N}(\exists x \forall y Mxy) = \mathbf{F}$. Note que não testamos todos os casos possíveis, mas usamos nosso conhecimento a respeito da estrutura $\mathfrak{N}$ em questão, cujo universo são os números naturais, e onde M está sendo interpretado como uma relação conhecida, '*x* é menor que *y*'.

Consideremos agora a última fórmula, $Px \vee Qx$. Como esta é uma fórmula aberta, ela terá o valor **V** em $\mathfrak{N}$ se e somente se seu fecho, $\forall x(Px \vee Qx)$, tiver **V** em $\mathfrak{N}$. Como essa agora é uma fórmula universal, temos que

$$\mathfrak{N}(\forall x(Px \vee Qx)) = \mathbf{V} \text{ sse } \mathfrak{N}(P\mathbf{i} \vee Q\mathbf{i}) = \mathbf{V}, \text{ para todo } \mathbf{i}.$$

Bem, este é outro caso em que não podemos examinar, caso a caso, cada elemento do universo de $\mathfrak{N}$ para verificar se a condição de fato ocorre. Sabemos, porém, que todo número natural é par ou ímpar,[4] ou seja, cada número natural tem ou a propriedade $I(P)$, ou $I(Q)$. Assim, $\mathfrak{N}(\forall x(Px \vee Qx)) = \mathbf{V}$, e, conseqüentemente, $\mathfrak{N}(Px \vee Qx) = \mathbf{V}$.

Exercício 10.5 Determine o fecho das fórmulas abaixo:

(a)	Rxc	(d)	$\exists y(Qy \rightarrow Lyz)$
(b)	$Rzw \rightarrow Rby$	(e)	$(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz$
(c)	$\neg Rxz \vee \forall u Qu$	(f)	$B \vee (Hbx \leftrightarrow Hyx)$

Exercício 10.6 Considere uma linguagem $\{a, b, c, d, B, G, L\}$ e uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$, onde $A = \{\text{Miau, Tweety, Cleo, Fido}\}$, e tal que a função interpretação I é como segue:

$I(a) = \text{Miau}$
$I(b) = \text{Tweety}$
$I(c) = \text{Cleo}$

[4] A questão de *como* sabemos isso, já que o universo dos naturais é infinito e não podemos, obviamente, examinar cada caso, é uma questão interessante. Falaremos um pouco sobre isso no capítulo 17.

$I(d) = \text{Fido}$
$I(B) = \{\text{Miau}, \text{Tweety}\}$
$I(G) = \{\text{Cleo}, \text{Fido}\}$
$I(L) = \{\langle\text{Miau}, \text{Miau}\rangle, \langle\text{Tweety}, \text{Tweety}\rangle, \langle\text{Cleo}, \text{Cleo}\rangle, \langle\text{Miau}, \text{Cleo}\rangle,$
$\langle\text{Miau}, \text{Fido}\rangle, \langle\text{Tweety}, \text{Cleo}\rangle, \langle\text{Cleo}, \text{Miau}\rangle, \langle\text{Fido}, \text{Miau}\rangle\}$

Diga se as fórmulas abaixo são verdadeiras ou falsas em $\mathfrak{A}$, e por que (note que, nesse primeiro exercício, não precisamos de nomes, já que a cada indivíduo foi atribuída uma constante):

(a) $\neg Bc$
(b) $\neg Gd \rightarrow Bb$
(c) $\neg Lca \leftrightarrow \neg Bb$
(d) $Ga \rightarrow (\neg Bb \wedge Bc)$
(e) $\neg(Lca \vee Lbb)$
(f) $\exists x Bx$
(g) $\exists x \neg Gx$
(h) $\forall x Lax$
(i) $\forall y Lyy$
(j) $\forall x Bx \wedge \forall x Gx$

Exercício 10.7 Considere uma linguagem $\{a, b, c, A, F, G, H, K\}$ e uma estrutura $\mathfrak{B} = \langle B, I\rangle$, onde $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e tal que a função interpretação I é como segue:

$I(a) = 0$
$I(b) = 2$
$I(c) = 4$
$I(A) = \mathbf{V}$
$I(F) = \{0, 1, 2\}$
$I(G) = \{2, 4\}$
$I(H) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$
$I(K) = \{\langle 1, 1, 2\rangle, \langle 2, 2, 4\rangle\}$

Diga se as fórmulas abaixo são verdadeiras ou falsas em $\mathfrak{B}$, e por quê. (Note que nem todos os indivíduos têm uma constante associada a eles; assim, a primeira coisa a fazer é acrescentar os nomes faltantes à linguagem.)

(a) Fa
(b) $Gb \vee A$
(c) Hbc
(d) $Kbbc$
(e) $\neg Fa \vee Ga$
(f) $Fa \rightarrow (Hab \vee Ga)$
(g) $\neg(\neg Fa \wedge \neg Kbbc)$
(h) $\exists y Fy$
(i) $\neg \exists y Fy$
(j) $\exists x \neg Gx$
(k) $\forall x Hax$
(l) $\exists x(Fx \wedge Gx)$
(m) $\exists x(\neg Fx \wedge \neg Gx)$
(n) $\exists x \neg Fx \wedge \exists x \neg Gx$
(o) $\forall x(Fx \rightarrow \exists y Gy)$
(p) $\neg \forall x \neg Gx$
(q) $\forall x(Gx \rightarrow Fx)$
(r) $Hba \rightarrow \forall x Hbx$
(s) $\exists x Kxxx$
(t) $\exists z \neg Kzab$
(u) $\neg \forall x Gx \leftrightarrow \neg \exists x Kxxx$
(v) $\exists x \exists y Hxy$
(w) $\forall y Hxy$
(x) $Fx \leftrightarrow \neg Hzz$

Exercício 10.8 Seja uma linguagem $\{a, b, c, H, L\}$ e uma estrutura $\mathfrak{C} = \langle C, I\rangle$ tal que $C = \{$Vênus, Hera, Minerva$\}$, e tal que a função interpretação I é como segue:

$I(a) =$ Vênus
$I(b) =$ Hera
$I(c) =$ Minerva
$I(H) = \{\text{Hera}, \text{Minerva}\}$
$I(L) = \{\langle\text{Vênus}, \text{Hera}\rangle, \langle\text{Minerva}, \text{Hera}\rangle, \langle\text{Hera}, \text{Hera}\rangle, \langle\text{Hera}, \text{Vênus}\rangle\}$

Com relação a essa estrutura, dê exemplos de:

(a) uma fórmula que seja falsa;
(b) uma fórmula com uma negação que seja verdadeira;
(c) um conjunção verdadeira;
(d) uma fórmula universalmente quantificada que seja verdadeira;
(e) uma fórmula existencialmente quantificada que seja falsa;
(f) uma fórmula com um quantificador universal e um existencial que seja verdadeira;
(g) uma fórmula aberta que seja verdadeira.

Exercício 10.9 Considere uma linguagem $\{a, b, P, Q\}$ e uma estrutura $\mathfrak{D} = \langle D, I\rangle$, onde $D = \{1, 2\}$, e tal que a função interpretação I é como segue:

$$I(a) = 1, \quad I(b) = 2, \quad I(P) = \{1\}, \quad I(Q) = \{\langle 2, 2\rangle\}.$$

Refaça os itens (a)–(g) do exercício anterior com relação à estrutura $\mathfrak{D}$.

Exercício 10.10 Considere as fórmulas $\exists x(Gx \land Lcx)$ e $\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)$, onde G é uma propriedade, e L uma relação binária. Construa:

(a) uma estrutura na qual essas fórmulas sejam ambas verdadeiras.
(b) uma estrutura na qual essas fórmulas sejam ambas falsas.

CAPÍTULO 11

VALIDADE E CONSEQÜÊNCIA LÓGICA

Neste capítulo, com base nas estruturas e na definição de verdade vistas no capítulo anterior, vamos definir validade e conseqüência lógica para o **CQC**.

11.1 Validade

No capítulo 9, depois de termos definido as valorações, verificamos que as fórmulas podiam ser classificadas em três tipos: as *tautologias*, aquelas que são verdadeiras em todas as valorações; as *contradições*, aquelas que são falsas em todas as valorações; e as *contingências*, aquelas que são verdadeiras em ao menos uma, e falsas em ao menos uma valoração. Uma vez que as valorações são um tipo de interpretação — apenas muito mais simples —, não é surpresa que possamos, agora, definir um conceito análogo ao de tautologia, por exemplo, embora mais refinado: o de uma *fórmula válida*, isto é, uma fórmula verdadeira em toda e qualquer estrutura. Mais precisamente:

Definição 11.1 *Uma fórmula α é válida (ou logicamente verdadeira) sse, para toda estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$. Uma fórmula α é uma contradição (ou logicamente falsa) sse, para toda estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{F}$. E, finalmente, uma fórmula α é uma contingência sse para alguma estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$, e para alguma estrutura $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(\alpha) = \mathbf{F}$.*

A primeira pergunta que você decerto está pensando em fazer é: bem, e o que acontece com as tautologias? Essa é uma boa pergunta, e a resposta é que elas continuam sendo logicamente verdadeiras, pois uma estrutura, poderíamos dizer, é um refinamento de uma valoração (como se fosse uma rede de pesca de malha mais fina, que captura verdades lógicas que as valorações deixam escapar).

É fácil perceber por que as tautologias são válidas. Se você observar a definição de verdade que demos na seção 10.4, vai notar que as cláusulas referentes às fórmulas moleculares simplesmente repetem as propriedades das valorações. Por exemplo, tínhamos que, para qualquer valoração v,

$$v(\neg\alpha) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad v(\alpha) = \mathbf{F}. \tag{1}$$

E o que diz a cláusula (c) da definição 10.2 é:

$$\mathfrak{A}(\neg\alpha) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{F}. \tag{2}$$

Obviamente, tanto (1) quanto (2) dizem a mesma coisa: uma negação é verdadeira (numa valoração, numa estrutura) sse a fórmula negada é falsa (nessa valoração, nessa estrutura). O caso dos outros operadores é análogo.

Resumindo, não é de admirar que as tautologias sejam válidas. Por outro lado, é óbvio que nem todas as fórmulas válidas são tautologias. Vamos ver um exemplo: tomemos a fórmula $\forall xPx \to Pa$. Como temos duas fórmulas elementares, $\forall xPx$ e Pa, uma tabela de verdade para ela seria:

$\forall xPx$	Pa	$\forall xPx \to Pa$
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**F**	**V**

E salta aos olhos que $\forall xPx \to Pa$ não é uma tautologia, pois é falsa em uma das linhas. Contudo, essa fórmula é válida — mas como demonstrar isto? Será que podemos modificar as tabelas de verdade de alguma forma aceitável?

Para dar uma resposta simples: não. As tabelas de verdade funcionam muito bem com os operadores do **CQC**, mas não conseguem lidar bem com quantificadores. Como você iria calcular o valor de uma fórmula como $\forall xPx$, por exemplo, tendo um universo infinito — que é um dos casos possíveis? Não quero entrar em detalhes agora — vamos ver isto mais tarde —, mas a triste verdade é que não existe um método mecânico, como tabelas de verdade, que permita *sempre* decidir se alguma fórmula do **CQC** é válida ou não, embora isso seja possível em muitos e muitos casos.

Voltando ao nosso exemplo, se não dispomos de tabelas de verdade, como vamos mostrar que $\forall xPx \rightarrow Pa$ é válida? Obviamente, não podemos investigar *todas* as estruturas. Como já vimos, há infinitas estruturas para uma linguagem qualquer. Contudo, raciocinando por absurdo, é fácil ver que $\forall xPx \rightarrow Pa$ é válida.

Vamos supor, como ponto de partida, que $\forall xPx \rightarrow Pa$ não seja válida. Ora, por definição, se ela não é válida, não acontece que ela seja verdadeira em todas as estruturas; logo, deve existir alguma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}(\forall xPx \rightarrow Pa) = \mathbf{F}$. Como essa fórmula é uma implicação, se ela é falsa em $\mathfrak{A}$, seu antecedente é verdadeiro em $\mathfrak{A}$, e seu conseqüente, falso. Ou seja, temos $\mathfrak{A}(\forall xPx) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{A}(Pa) = \mathbf{F}$. Agora, se $\mathfrak{A}(\forall xPx) = \mathbf{V}$, por definição, $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = \mathbf{V}$ para todo parâmetro **i**. (Recorde que um parâmetro **i** é uma constante ou um nome.) Como a é uma constante da linguagem $\mathcal{L}$ em causa, pois ocorre em $\forall xPx \rightarrow Pa$, temos que $\mathfrak{A}(Pa) = \mathbf{V}$ — mas isso contradiz o que havíamos concluído acima, isto é, que $\mathfrak{A}(Pa) = \mathbf{F}$. Uma vez que nossa hipótese de que $\forall xPx \rightarrow Pa$ não é válida nos levou a uma contradição, concluímos que essa hipótese estava errada, e que $\forall xPx \rightarrow Pa$ é, de fato, válida.

Assim, como você vê, pudemos mostrar a validade de $\forall xPx \rightarrow Pa$, mesmo não tendo tabelas de verdade. E essa maneira de raciocinar por absurdo é apenas um dos métodos. Falaremos mais sobre isso depois. O importante é lembrar que existem bem mais fórmulas válidas do que apenas as tautologias.

Vamos examinar um outro exemplo. Digamos que queiramos mostrar a validade de $(\forall x(Ax \rightarrow Bx) \wedge \exists xAx) \rightarrow \exists xBx$. Começamos, mais uma vez, supondo que esta fórmula não seja válida; portanto, deve haver alguma estrutura $\mathfrak{A}$ em que ela seja falsa. E como essa fórmula

é um condicional, temos: $\mathfrak{A}(\forall x(Ax \to Bx) \wedge \exists xAx) =$ **V** e $\mathfrak{A}(\exists xBx) =$ **F**. Porém, como o antecedente desse condicional, $\forall x(Ax \to Bx) \wedge \exists xAx$, é uma conjunção, temos ainda: $\mathfrak{A}(\forall x(Ax \to Bx)) = \mathfrak{A}(\exists xAx) =$ **V**. Consideremos agora a fórmula existencial $\exists xAx$, que é verdadeira em $\mathfrak{A}$. Pela definição de verdade, $\mathfrak{A}(A\mathbf{i}) =$ **V**, para algum parâmetro **i**. Vamos usar a constante a para representar esse parâmetro. Assim, $\mathfrak{A}(Aa) =$ **V**. Consideremos agora a fórmula universal $\forall x(Ax \to Bx)$, que também é verdadeira em $\mathfrak{A}$. Por definição, temos que $\mathfrak{A}(A\mathbf{i} \to B\mathbf{i}) =$ **V**, para todo parâmetro **i**. Como a é um parâmetro, segue-se imediatamente que $\mathfrak{A}(Aa \to Ba) =$ **V**. Ora, vimos acima que $\mathfrak{A}(Aa) =$ **V**, ou seja, o antecedente do condicional verdadeiro $Aa \to Ba$ é também verdadeiro. Que podemos concluir? Que $\mathfrak{A}(Ba) =$ **V**, claro. (Se Ba fosse falsa em $\mathfrak{A}$, $Aa \to Ba$ teria que ser falsa também.) Note agora o seguinte: se Ba é verdadeira em $\mathfrak{A}$, e a é um parâmetro, que podemos concluir a respeito do valor de $\exists xBx$ em $\mathfrak{A}$? Obviamente, que $\mathfrak{A}(\exists xBx) =$ **V**. E aí temos a contradição que buscávamos, pois havíamos, bem no começo, concluído que $\mathfrak{A}(\exists xBx) =$ **F**. Portanto, a hipótese de que $(\forall x(Ax \to Bx) \wedge \exists xAx) \to \exists xBx$ não era válida nos levou a uma contradição. Logo, essa fórmula é válida.

É claro que, por outro lado, conseguiremos mostrar que alguma fórmula é inválida se exibirmos alguma estrutura em que ela seja falsa — basta *uma* estrutura. Por exemplo, considere a fórmula $\neg Pa \to \neg\exists xPx$. Ela é inválida, e é fácil ver isso. A linguagem dessa fórmula é o conjunto $\{a, P\}$. Consideremos agora a estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$ para essa linguagem, tal que $A = \{0, 1\}$, e I é tal que $I(a) = 0$ e $I(P) = \{1\}$. Acrescentemos a essa linguagem a constante b para servir de nome para o indivíduo 1. Temos então $I(b) = 1$. Ora, como $0 \notin I(P)$, $\mathfrak{A}(Pa) =$ **F**, e, claro, $\mathfrak{A}(\neg Pa) =$ **V**. Por outro lado, como $1 \in I(P)$, $\mathfrak{A}(Pb) =$ **V**, e segue-se que $\mathfrak{A}(\exists xPx) =$ **V**, de onde temos imediatamente que $\mathfrak{A}(\neg\exists xPx) =$ **F**. Uma vez que a fórmula $\neg Pa \to \neg\exists xPx$ é um condicional cujo antecedente é verdadeiro e cujo conseqüente é falso em $\mathfrak{A}$, segue-se que $\mathfrak{A}(\neg Pa \to \neg\exists xPx) =$ **F**. Assim, tendo construído uma estrutura $\mathfrak{A}$ em que $\neg Pa \to \neg\exists xPx$ é falsa, concluímos que ela não pode ser válida. Ou seja, ela é inválida.

Exercício 11.1 As fórmulas na lista seguinte são exemplos de fórmulas válidas do CQC, porém, nenhuma delas é uma tautologia. Tente provar

que elas são de fato válidas, demonstrando que não é possível haver uma estrutura onde elas sejam falsas.

(a)	$\forall xPx \rightarrow Pa$	(f)	$\forall x(\neg Px \lor Px)$
(b)	$Pa \rightarrow \exists xPx$	(g)	$\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\forall xAx \rightarrow \forall xBx)$
(c)	$\forall x(Px \rightarrow Px)$	(h)	$(\forall xAx \lor \forall xBx) \rightarrow \forall x(Ax \lor Bx)$
(d)	$\neg\exists x(Px \land \neg Px)$	(i)	$\exists x(Ax \land Bx) \rightarrow (\exists xAx \land \exists xBx)$
(e)	$\forall x\neg(Px \land \neg Px)$	(j)	$\exists x\forall yRxy \rightarrow \forall y\exists xRxy$

Exercício 11.2 As fórmulas abaixo são todas inválidas. Mostre isso, construindo para cada uma delas uma estrutura onde a fórmula seja falsa:

(a)	$Pa \rightarrow \forall xPx$	(d)	$\forall x(Ax \lor Bx) \rightarrow (\forall xAx \lor \forall xBx)$
(b)	$\exists xPx \rightarrow Pa$	(e)	$\forall x\exists yRxy \rightarrow \exists y\forall xRxy$
(c)	$(\exists xPx \land \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \land Qx)$	(f)	$(\forall xPx \rightarrow A) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow A)$

11.2 Conseqüência lógica (semântica)

Podemos definir agora, através de estruturas, um análogo da noção de conseqüência tautológica que havíamos visto no capítulo 9. Primeiro, a definição de modelo:

Definição 11.2 *Uma estrutura $\mathfrak{A}$ é modelo de um conjunto de fórmulas Γ se, para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{A}(\gamma) = \mathbf{V}$.*

Ou seja, uma estrutura é modelo de um conjunto de fórmulas se todas as fórmulas do conjunto são verdadeiras nesta estrutura. Note bem: *todas*. Se uma só for falsa, a estrutura já não será modelo do conjunto. Escrevemos que $\mathfrak{A}$ é modelo de um conjunto Γ de fórmulas da seguinte maneira: $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Se $\mathfrak{A}$ não for modelo de Γ, escrevemos: $\mathfrak{A} \nvDash \Gamma$.

Costumamos dizer também que uma estrutura é modelo de uma fórmula, por exemplo, que $\mathfrak{A} \vDash \alpha$. Isso é apenas uma abreviação de $\mathfrak{A} \vDash \{\alpha\}$, e significa a mesma coisa que $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$, claro.

Se um conjunto Γ de fórmulas possui um modelo, dizemos que Γ é *satisfatível.* Caso contrário — ou seja, não há nenhuma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ — dizemos que Γ é *insatisfatível.*

Finalmente, a definição de conseqüência lógica:

Definição 11.3 *Se Γ é um conjunto de fórmulas, e α uma fórmula, dizemos que $\Gamma \vDash \alpha$ (α é uma conseqüência lógica de Γ) sse todo modelo de Γ é também modelo de α, isto é, para toda estrutura $\mathfrak{A}$ que for uma interpretação para a linguagem de Γ e de α, se $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, então $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$.*

Podemos também dizer que, se α é uma conseqüência lógica de Γ, Γ *implica logicamente* α.

Algumas observações sobre isto. Primeiro, assim como a noção de conseqüência tautológica era definida por meio de valorações, sendo um conceito semântico, nossa noção de conseqüência lógica aqui apresentada é uma noção semântica. Assim, é usual que se diga que uma fórmula α é uma *conseqüência semântica* de um conjunto Γ, ou que Γ *implica semanticamente* α. (Naturalmente, fala-se assim para estabelecer uma distinção com relação a uma noção *sintática* de conseqüência lógica, da qual nos ocuparemos posteriormente.)

Em segundo lugar, assim como as tautologias são um caso mais particular de fórmula válida, conseqüência tautológica é um caso particular de conseqüência lógica (semântica). E, de modo similar, existem fórmulas que são conseqüência lógica de algum conjunto, sem que sejam conseqüências tautológicas dele. Dito de outra forma, a noção de conseqüência tautológica é a noção de conseqüência lógica restrita ao **CPC** (i.e., à lógica proposicional).

Vamos ver alguns exemplos. Sejam Γ e Δ dois conjuntos de fórmulas, tal que:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\forall x(Fx \vee \neg Gx), Ga, \exists x Fx, \neg Gb\}, \\ \Delta &= \{\forall x(Fx \to Gx), Ga\}. \end{aligned}$$

Consideremos a fórmula Fa. É fácil verificar que Fa é uma conseqüência semântica de Γ, isto é, $\Gamma \vDash Fa$; contudo, Fa não é uma conseqüência semântica de Δ, ou seja, $\Delta \nvDash Fa$. Vamos mostrar isso raciocinando por absurdo.

Suponhamos, para começar, que $\Gamma \nvDash Fa$. Assim, deve existir uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, e $\mathfrak{A}(Fa) = \mathbf{F}$. Como $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, todas as fórmulas em Γ são verdadeiras em $\mathfrak{A}$; particularmente, temos que $\mathfrak{A}(\forall x(Fx \vee \neg Gx)) = \mathbf{V}$, e $\mathfrak{A}(Ga) = \mathbf{V}$. Pela definição de verdade, temos então que $\mathfrak{A}(F\mathbf{i} \vee \neg G\mathbf{i}) = \mathbf{V}$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$ relativo ao universo de $\mathfrak{A}$. Em particular, $\mathfrak{A}(Fa \vee \neg Ga) = \mathbf{V}$, o que implica, mais uma vez

pela definição de verdade, que ou $\mathfrak{A}(Fa) = \mathbf{V}$, ou $\mathfrak{A}(\neg Ga) = \mathbf{V}$. Contudo, por hipótese, havíamos suposto que Fa é falsa em $\mathfrak{A}$, ou seja, $\mathfrak{A}(Fa) = \mathbf{F}$. Assim, a única possibilidade que resta é que $\mathfrak{A}(\neg Ga) = \mathbf{V}$. Pela definição de verdade, concluímos, então, que $\mathfrak{A}(Ga) = \mathbf{F}$. Mas isto contradiz nossa hipótese, pois Ga está em Γ, e havíamos suposto que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Assim, como nossa hipótese nos leva a contradições em qualquer caso, ela é falsa. Ou seja, fica demonstrado que $\Gamma \vDash Fa$.

Suponhamos agora que tentássemos provar que $\Delta \vDash Fa$. Começamos supondo que $\Delta \nvDash Fa$. Assim, deve existir uma estrutura, digamos $\mathfrak{B}$, tal que $\mathfrak{B} \vDash \Delta$, e $\mathfrak{B}(Fa) = \mathbf{F}$. Segue-se que todas as fórmulas em Δ são verdadeiras em $\mathfrak{B}$; isto é, temos que $\mathfrak{B}(\forall x(Fx \to Gx)) = \mathbf{V}$, e $\mathfrak{B}(Ga) = \mathbf{V}$. Pela definição de verdade, temos então que $\mathfrak{B}(F\mathbf{i} \to G\mathbf{i}) = \mathbf{V}$, para todo $\mathbf{i}$. Particularmente, $\mathfrak{B}(Fa \to Ga) = \mathbf{V}$, o que implica, mais uma vez pela definição de verdade, que: ou $\mathfrak{B}(Fa) = \mathbf{F}$, ou $\mathfrak{B}(Ga) = \mathbf{V}$. Agora é que vem o problema: por hipótese, já havíamos suposto que Fa é falsa em $\mathfrak{B}$. Onde está a contradição? Bem, na verdade, não há até agora nenhuma contradição. Quer dizer, $\mathfrak{B}$ é uma estrutura na qual, de fato, todas as fórmulas de Δ são verdadeiras, e Fa é falsa. De onde podemos desconfiar que $\Delta \nvDash Fa$.

Note que eu usei a palavra 'desconfiar', e não 'concluir'. Na verdade, para afirmar que $\Delta \nvDash Fa$, deveríamos exibir a estrutura $\mathfrak{B}$ (pois pode haver ainda alguma contradição escondida que não tenhamos percebido). Isso não é muito difícil: basta construí-la, com as pistas dadas pelo raciocínio do parágrafo anterior. Seja então $\mathfrak{B} = \langle B, I \rangle$. Agora, seja lá qual for o universo de $\mathfrak{B}$, duas coisas terão que acontecer: (i) todo indivíduo que estiver em $I(F)$ terá que estar em $I(G)$, pois "todo F é G"; (ii) $I(a)$ terá que estar em $I(G)$, pois "a é G".

Bem, digamos então que

$$B = \{\text{Miau}\}, \quad I(a) = \text{Miau}, \quad I(F) = \varnothing, \quad \text{e} \quad I(G) = \{\text{Miau}\}.$$

É fácil verificar que $\forall x(Fx \to Gx)$ é trivialmente verdadeira em $\mathfrak{B}$, e que Miau pertence a $I(G)$, ou seja, $\mathfrak{B}(Ga) = \mathbf{V}$. Contudo, $\mathfrak{B}(Fa) = \mathbf{F}$, pois $I(a) \notin I(F)$. Assim, exibimos uma estrutura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \Delta$, e $\mathfrak{B}(Fa) = \mathbf{F}$. E fica demonstrado que $\Delta \nvDash Fa$.

Com relação, portanto, à questão de como determinar se, de fato, alguma fórmula é conseqüência ou não de um conjunto de fórmulas,

as mesmas observações a respeito da validade se aplicam. Não há um método mecânico que permita, sempre, decidir se alguma fórmula é implicada ou não por algum conjunto de fórmulas. Desta maneira, se temos um conjunto de fórmulas Γ, e uma certa fórmula α, o que podemos fazer é raciocinar, por exemplo, por absurdo — supondo que $\Gamma \not\vDash \alpha$ — e tentar encontrar alguma contradição. Se isto não acontecer, então podemos tentar construir uma estrutura que seja modelo de Γ, mas não de α. Nem sempre isso é fácil de fazer, claro.

Exercício 11.3 Mostre que cada um dos conjuntos de fórmulas abaixo é satisfatível, construindo uma estrutura que seja modelo dele:

(a) $\{Pa, \neg Rab, \neg Pb\}$
(b) $\{\exists xQx, \exists xPx, \neg Pa \wedge \neg Qa\}$
(c) $\{\forall x(Ax \to Bx), Am, \neg Bp\}$
(d) $\{\forall xPx, \neg\exists xQx\}$
(e) $\{Pa, \exists xPx \to \forall x\forall yLxy\}$

Exercício 11.4 Mostre que:

(a) $\neg A \vee Qb, \neg Qb \vDash \neg A$
(b) $\exists x(Fx \wedge Gx) \vDash \exists xFx$
(c) $Pa \to \forall xLxa, \neg Lba \vDash \neg Pa$
(d) $\forall x(Px \to Qx), \forall yPy \vDash \forall zQz$

Exercício 11.5 Mostre que:

(a) $\neg A \vee Qb, Qb \not\vDash \neg A$
(b) $\exists xFx \not\vDash \exists x(Fx \wedge Gx)$
(c) $Pa \to \forall xLxa, \exists x\neg Lax \not\vDash \neg Pa$
(d) $\forall x(Px \to Qx), \forall yQy \not\vDash \forall zPz$

11.3 Algumas propriedades de $\vDash$

Voltando a falar da relação semântica de conseqüência lógica, um de seus casos particulares ocorre quando alguma fórmula α implica logicamente uma outra fórmula β. Dizemos que $\alpha \vDash \beta$, é claro, se $\{\alpha\} \vDash \{\beta\}$. E duas fórmulas quaisquer, α e β, são ditas *logicamente equivalentes* sse $\alpha \vDash \beta$ e $\beta \vDash \alpha$. (Alternativamente, se α e β têm valores idênticos em qualquer estrutura.)

Dadas as definições, fica fácil demonstrar alguns princípios envolvendo as noções semânticas de validade e conseqüência lógica. Por exemplo:

Proposição 11.1 *α é válida sse $\varnothing \models \alpha$.*

Prova. Como essa proposição é uma equivalência, podemos demonstrá-la provando as implicações nas duas direções, isto é:

(i) se α é válida então $\varnothing \models \alpha$;

(ii) se $\varnothing \models \alpha$ então α é válida.

Comecemos com o caso (i), e vamos supor que α seja válida. Como não existe uma estrutura em que α seja falsa, não existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varnothing$ e $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{F}$. Em outras palavras, para toda estrutura $\mathfrak{A}$, se $\mathfrak{A} \models \varnothing$, então $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$. Assim, $\varnothing \models \alpha$.

Vamos considerar agora o caso (ii), e comecemos supondo que $\varnothing \models \alpha$. É fácil verificar que, para toda estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \varnothing$: se houvesse alguma estrutura $\mathfrak{A}$ que não fosse modelo de $\varnothing$, teríamos que ter alguma fórmula $\beta \in \varnothing$ tal que $\mathfrak{A}(\beta) = \mathbf{F}$. Mas é claro que nenhuma fórmula pertence ao conjunto vazio; logo, não pode haver nenhuma estrutura que falsifique alguma fórmula do vazio. Ou seja, toda estrutura é modelo do vazio. E como, por hipótese, toda estrutura que for modelo de $\varnothing$ é um modelo de α, concluímos que, para toda estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \alpha$. Ou seja, α é válida.

Uma vez que demonstramos a proposição acima, podemos indicar que alguma fórmula α é válida escrevendo simplesmente '$\models \alpha$'.

Vamos ver agora mais algumas propriedades interessantes da relação de conseqüência semântica:

Proposição 11.2

(a) *$\sigma \models \beta$ sse $\models \sigma \to \beta$, onde σ é alguma sentença (ou seja, uma fórmula fechada).*

(b) *α e β são logicamente equivalentes sse $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.*

(c) *Se Γ é um conjunto de fórmulas válidas (isto é, se para todo $\beta \in \Gamma$, $\models \beta$), e $\Gamma \models \alpha$, então $\models \alpha$.*

(d) *A implicação lógica (semântica) é transitiva, isto é: se* $\alpha \models \beta$ *e* $\beta \models \gamma$, *então* $\alpha \models \gamma$.

(e) *Se* $\models \alpha$ *e* $\models \beta$, *então* α *e* β *são logicamente equivalentes.*

(f) *Se* $\models \alpha$, *então, qualquer que seja* Γ, $\Gamma \models \alpha$.

(g) *Se* α *é uma contradição, então, qualquer que seja* β, $\alpha \models \beta$.

(h) $\Gamma \models \sigma \to \beta$ *sse* $\Gamma \cup \{\sigma\} \models \beta$, *onde* σ *é alguma sentença (ou seja, uma fórmula fechada).*

Não vamos demonstrar as propriedades acima (bem, você pode tentar; seria um ótimo exercício). Vou fazer apenas um comentário sobre a restrição nos casos (a) e (h), que envolvem uma sentença σ. É fácil ver que a propriedade (a), por exemplo, pode não funcionar se tivermos uma fórmula aberta α qualquer, em vez de uma sentença σ. Seja $\alpha = Py$, e $\beta = \forall x Px$. Nesse caso, a propriedade a demonstrar seria, numa das direções

$$\text{Se} \quad Py \models \forall x Px \quad \text{então} \quad \models Py \to \forall x Px.$$

Vamos mostrar que o condicional acima é falso. Para isso, precisamos mostrar primeiro que $Py \models \forall x Px$ e, depois, que $\not\models Py \to \forall x Px$.

A primeira parte é fácil: como Py é uma fórmula aberta, Py é verdadeira em uma estrutura $\mathfrak{A}$ se e somente se $\forall y Py$ é verdadeira em $\mathfrak{A}$. Logo, qualquer estrutura que torne Py verdadeira torna $\forall x Px$ automaticamente verdadeira. Assim, $Py \models \forall x Px$.

Precisamos agora mostrar que $\not\models Py \to \forall x Px$, ou seja, que $Py \to \forall x Px$ não é válida. Para isso, basta exibir uma estrutura em que esta fórmula é falsa. E, como ela é uma fórmula aberta, precisamos mostrar que seu fecho, $\forall y(Py \to \forall x Px)$, é falso na estrutura.

Seja $\mathcal{L} = \{a, P\}$ uma linguagem de primeira ordem, e $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura para $\mathcal{L}$, onde $A = \{0, 1\}$, e I é tal que $I(a) = 0$, e $I(P) = \{0\}$. Finalmente, seja b o nome de 1. (Assim, $I(b) = 1$.) Agora, pela definição de verdade, temos

$$\mathfrak{A}(\forall y(Py \to \forall x Px)) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(P\mathbf{i} \to \forall x Px) = \mathbf{V}, \quad \text{para todo parâmetro } \mathbf{i}.$$

Bem, mostraremos que $\mathfrak{A}(Pa \to \forall x Px) = \mathbf{F}$. Note, em primeiro lugar, que $\mathfrak{A}(Pa) = \mathbf{V}$, pois $I(a) \in I(P)$. Contudo, $\mathfrak{A}(Pb) = \mathbf{F}$, já que

$1 \notin \{0\}$. Logo, $\mathfrak{A}(\forall x Px) = \mathbf{F}$, e segue-se que $\mathfrak{A}(Pa \rightarrow \forall x Px) = \mathbf{F}$, e que $\mathfrak{A}(\forall y(Py \rightarrow \forall x Px)) = \mathbf{F}$, como queríamos demonstrar.

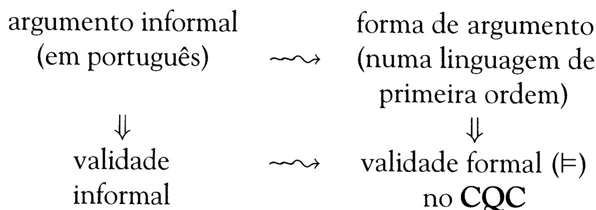
É claro que o problema surgiu porque a fórmula $\alpha = Py$ era aberta. Se tivermos uma sentença, como σ no caso (a) mencionado anteriormente, não há dificuldade alguma. As mesmas observações, naturalmente, valem para a propriedade enunciada em (h).

11.4 A validade de argumentos

Como você se recorda, no início deste livro demos uma primeira idéia, ainda informal, da validade de um argumento: um argumento válido é aquele tal que não é possível que suas premissas sejam verdadeiras e sua conclusão, falsa. Utilizando agora a noção de conseqüência lógica que definimos na seção anterior, podemos caracterizar de um modo mais preciso a validade de um argumento.

Recorde que um argumento é constituído por um conjunto de sentenças (ou proposições), as premissas, e uma outra sentença (ou proposição), a conclusão. Se representarmos as premissas e a conclusão por fórmulas do cálculo de predicados, podemos dizer que o argumento original é válido se o conjunto das fórmulas que correspondem às premissas implicar logicamente a fórmula que representa a conclusão. O que temos, então, é um conjunto Γ de premissas, alguma fórmula α como conclusão, e uma definição precisa do que significa dizer que α se segue de Γ. A expressão 'não é possível que suas premissas sejam verdadeiras e sua conclusão falsa' fica reformulada da seguinte maneira: 'não existe uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que as premissas sejam verdadeiras em $\mathfrak{A}$, e a conclusão, falsa'. E como a estrutura e a verdade de uma fórmula numa estrutura são coisas definidas de modo exato, preciso, a questão fica (quase) resolvida.

Essa situação pode ser apresentada no seguinte diagrama:



Algumas observações a esse respeito. Em primeiro lugar, note que a definição de conseqüência lógica é mais geral do que simplesmente a caracterização da validade de um argumento, pois, enquanto um argumento sempre tem um conjunto finito de premissas, definimos conseqüência lógica com respeito a um conjunto Γ qualquer de fórmulas — que pode ser inclusive um conjunto infinito.

Em segundo lugar, você deve ter notado no diagrama acima que a definição de conseqüência lógica não se aplica diretamente a argumentos, mas a *formas* de argumentos, o que não é a mesma coisa. O ponto central é: como passar de um argumento que está em português, ou alguma outra língua natural, para uma linguagem formal como a do **CQC**? Como você se recorda, os operadores, por exemplo, são idealizações com respeito a certas expressões do português — a questão a respeito de como formalizar adequadamente sentenças condicionais deve ter deixado isso claro. Assim, a questão é se uma certa formalização de um argumento é uma formalização correta. Pode acontecer que um argumento intuitivamente válido se mostre, analisado dentro do cálculo de predicados, como inválido. É claro que, freqüentemente, nossas intuições estão erradas, mas pode também ocorrer que o argumento não tenha sido formalizado corretamente — e pode mesmo acontecer que não seja possível formalizá-lo corretamente no **CQC**, daí certos sistemas lógicos não-clássicos. (Mas essa é uma outra história, de que nos ocuparemos mais tarde.)

Voltando à determinação da validade de argumentos, então, o processo consiste em traduzi-los para uma linguagem de primeira ordem, para a qual a noção de conseqüência foi definida de modo preciso, e então testar a validade da forma correspondente. Naturalmente, isso traz também alguns problemas. Como vimos, não é possível examinar todas as estruturas para ver se, sempre que um certo conjunto de premissas é verdadeiro, a conclusão também se mostra verdadeira nessa estrutura. O que nos resta (enquanto o próximo capítulo não começa) é tentar demonstrar (por absurdo, por exemplo) que a forma de argumento é mesmo válida — e, tendo insucesso, construir uma estrutura que sirva de contra-exemplo, isto é, em que as fórmulas correspondentes às premissas sejam verdadeiras, e aquela correspondente à conclusão, falsa, como fizemos na seção anterior.

Mas, claro, existem maneiras mais simples de fazer isso, e é o que vamos começar a investigar no capítulo seguinte.

Exercício 11.6 Os argumentos a seguir são bem simples. Transcreva-os para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida, e tente determinar sua validade — ou construindo uma estrutura onde as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa, ou demonstrando que não é possível construir uma tal estrutura.

(a) Beethoven é um músico alemão; logo, Beethoven é um músico. (*b*: Beethoven; *M*: *x* é um músico; *A*: *x* é alemão)

(b) Romeu ama Julieta; logo, alguém ama Julieta. (*r*: Romeu; *j*: Julieta; *A*: *x* ama *y*)

(c) Alguém assassinou Kennedy; logo, Oswald assassinou Kennedy. (*k*: Kennedy; *o*: Oswald; *A*: *x* assassina *y*)

(d) Todos os gregos são mortais; logo, Sócrates é mortal. (*s*: Sócrates; *G*: *x* é um grego; *M*: *x* é mortal)

(e) Todos os marcianos são verdes, e todos os gatos são marcianos; logo, todos os gatos são verdes. (*M*: *x* é um marciano; *G*: *x* é um gato; *B*: *x* é verde)

(f) Gatos e cachorros são mamíferos. Miau é um gato; logo, Miau é mamífero. (*m*: Miau; *G*: *x* é um gato; *C*: *x* é um cachorro; *M*: *x* é um mamífero)

(g) Stefan e Mathias gostam de chocolate. Todos os que gostam de pipoca gostam de chocolate. Logo, Stefan e Mathias gostam de pipoca. (*s*: Stefan; *m*: Mathias; *C*: *x* gosta de chocolate; *P*: *x* gosta de pipoca)

(h) Se Stefan gosta de chocolate, então Mathias gosta de chocolate. Quem gosta de chocolate não gosta de espinafre. Logo, se Stefan gosta de chocolate, então Mathias não gosta de espinafre. (*s*: Stefan; *m*: Mathias; *C*: *x* gosta de chocolate; *E*: *x* gosta de espinafre)

(i) Todos os filósofos são malucos, e todo mundo é maluco. Logo, todos são filósofos. (*F*: *x* é um filósofo; *M*: *x* é maluco)

(j) As rosas são vermelhas, e as violetas são azuis. Logo, existem coisas vermelhas e existem coisas azuis. (*R*: *x* é uma rosa; *A*: *x* é vermelha; *L*: *x* é uma violeta; *B*: *x* é azul)

CAPÍTULO 12

TABLÔS SEMÂNTICOS

Neste capítulo, vamos nos ocupar de um método que nos permite mostrar a validade ou invalidade de uma fórmula do **CQC**, ou determinar se alguma fórmula é conseqüência lógica, ou não, de algum conjunto de fórmulas: o método dos *tablôs semânticos* (ou, como também é conhecido, das *árvores de refutação*).

12.1 Procedimentos de prova

No final do capítulo anterior, nos vimos diante do problema de como determinar se alguma fórmula α é válida, ou se é ou não conseqüência lógica de um conjunto Γ qualquer de fórmulas. Este parece ser um problema difícil, pois não temos como examinar *todas* as estruturas possíveis para uma certa linguagem de modo a verificar se α é verdadeira em qualquer estrutura, ou se é verdadeira naquelas que são modelo de Γ. Gostaríamos, portanto, de encontrar algum tipo de procedimento que nos permitisse ter uma resposta (positiva ou negativa) para as questões acima, dentro de um tempo razoável: um *procedimento* (ou *sistema*) *de prova*.

Idealmente, um tal procedimento deveria ser mecânico e determinístico: um conjunto de instruções formulado de maneira tão precisa que possa ser executado por um computador; um procedimento que

não exija nenhuma criatividade ou engenhosidade para a sua execução. E, claro, um procedimento que *sempre* dê uma resposta (sim ou não) à pergunta feita. Para usar um termo técnico, gostaríamos de ter um *algoritmo* para decidir sobre a validade de uma fórmula do **CQC**, ou se uma fórmula é implicada logicamente por um conjunto de fórmulas.

Um *algoritmo* pode ser definido como um *procedimento computacional efetivo*, isto é, um *procedimento*, executável por um *computador*, que sempre termina após um número finito de passos (*efetivo*). Você conhece vários tipos de algoritmo. Para dar um exemplo simples, suponhamos que você queira calcular $n!$, o fatorial de n, para algum número natural positivo n. O algoritmo é simples, bastando multiplicar $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Sendo n um número natural positivo qualquer, é óbvio que o procedimento de cálculo sempre vai terminar, ainda que isso possa demorar bastante, se n for muito grande. (A propósito, a diferença entre algoritmos e procedimentos em geral é que um procedimento pode não chegar ao fim de sua execução em alguns casos.)

Mas não basta ter um algoritmo para decidir se uma fórmula é válida ou não: gostaríamos, além disso, de que esse algoritmo fosse *eficiente*, isto é, que nos desse uma resposta o mais rápido possível. Bem, para sermos sinceros, que nos desse uma resposta num tempo razoável, já que "o mais rápido possível" pode, às vezes, demorar demais. Por exemplo, um algoritmo que, ao ser executado, leva dez anos para dar uma resposta não é lá muito interessante do ponto de vista prático — ainda que a resposta venha no tempo mais rápido possível para o algoritmo!

No capítulo 9, ao falar de valorações, vimos que o método de tabelas de verdade é um tal procedimento efetivo que pode ser aplicado à lógica proposicional para decidir se algo é ou não uma tautologia. Note, primeiro, que as instruções para construir uma tabela de verdade podem ser executadas por uma máquina: descobrir quais são as fórmulas elementares de uma fórmula α qualquer, listar as subfórmulas de α, calcular o número de linhas da tabela e gerar as combinações de valores, calcular o valor de uma fórmula numa coluna, decidir se a fórmula é uma tautologia ou não verificando se ela tem **V** em todas as colunas... Todas estas instruções são mecânicas. Depois, note que a construção de uma tabela de verdade sempre termina após um

número finito de passos. Como qualquer fórmula tem um comprimento finito, há apenas um número finito de fórmulas elementares envolvidas, um número finito de linhas e um número finito de colunas a calcular. Mais cedo ou mais tarde, uma tabela de verdade sempre fica pronta. E, estando pronta, temos sempre uma resposta, positiva ou negativa, sobre se certa fórmula é tautologia ou não, se é conseqüência tautológica de outras ou não.

Em virtude do que foi dito acima, as tabelas de verdade constituem um *procedimento de decisão* para o conjunto das tautologias, ou para a relação de conseqüência tautológica, ou seja, um procedimento de decisão para o **CPC**. Assim, o conjunto das tautologias é dito *decidível* pelo método de tabelas de verdade. (No geral, dizemos que uma classe de perguntas é decidível se há um algoritmo para obter uma resposta a qualquer pergunta da classe.)

Contudo, tabelas de verdade se aplicam apenas à lógica proposicional, não conseguindo lidar, claro, com quantificadores. Além disso, elas são bastante ineficientes: pode acontecer que você faça uma tabela com, digamos, 32 linhas, para descobrir que, exatamente na última delas, a fórmula α que você está investigando recebe o valor **F**, e não é uma tautologia! O ideal, se existe alguma linha onde α é falsa, é que pudéssemos achá-la diretamente, e não ficar perdendo tempo com as outras 31. De mais a mais, o número de linhas de uma tabela de verdade aumenta exponencialmente em função do número de fórmulas elementares envolvidas, ou seja, se temos n fórmulas elementares, o número de linhas será 2^n. Suponha, então, que temos um computador capaz de construir uma linha de uma tabela em um microssegundo: se a tabela tiver cinqüenta fórmulas elementares, mesmo assim o computador precisará de 35,7 *anos* para construí-la! E uma tabela envolvendo cem fórmulas elementares, por exemplo, teria 2^{100} linhas. Nesse caso, seriam necessários quatrocentos trilhões de séculos para terminar a tabela. (Lembre-se de que o universo começou há meros 15 bilhões de anos.)

Resumindo, o que precisamos é de algum outro método, que seja, por um lado, mais eficiente que tabelas de verdade e, por outro, que possa lidar também com fórmulas gerais. Além disso, há duas outras características desejáveis de qualquer procedimento ou sistema de prova:

(i) ele deve ser *correto*, isto é, provar *apenas* as fórmulas válidas;

(ii) ele dever ser *completo*, isto é, provar *todas* as fórmulas válidas.

A primeira característica, a da correção (também chamada *legitimidade*), justifica-se por que queremos ter certeza de que uma fórmula é mesmo válida quando o procedimento de prova diz que é (ou seja, ele não prova nenhuma fórmula que não seja válida). Quanto à segunda, queremos também ter certeza de que uma fórmula não é válida, quando o procedimento não diz que é.

O método de *tablôs semânticos* é um passo nessa direção, embora tenha também suas limitações (com relação à eficiência, sobre o que vamos falar mais tarde). A história dos tablôs começa em 1935, com a introdução, por Gerhard Gentzen, dos sistemas de prova conhecidos hoje em dia como *cálculos de seqüentes*. A característica desses sistemas de prova é que eles obedecem à chamada propriedade das subfórmulas: ou seja, na prova de que alguma fórmula α é válida, precisamos apenas considerar as subfórmulas de α. (Que isso é uma propriedade maravilhosa vai ficar claro quando estudarmos outros métodos em capítulos posteriores!) O trabalho original de Gentzen foi depois desenvolvido por E. Beth, e mais tarde por Raymond Smullyan, resultando nos tablôs que você vai aprender agora.

A característica principal desse procedimento de prova por tablô é que ele é um *método de refutação*: para mostrar que alguma fórmula α é válida, começamos supondo que ela não o é, e derivamos as conseqüências dessa suposição. Se isso nos levar a algum absurdo (como alguma fórmula ter que ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo), então a suposição inicial estava errada. Caso contrário, os tablôs nos dão imediatamente um *contra-exemplo* à fórmula α em questão, isto é, a receita para construir uma estrutura onde α é falsa. (Bem, isso vale realmente no caso da lógica proposicional. Para o **CQC** em geral, às vezes a situação se complica, como veremos depois.)

A idéia que está por trás dos procedimentos de refutação é o seguinte teorema, que podemos demonstrar a respeito do **CQC**:

Teorema 12.1 *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas qualquer.* $\Gamma \models \alpha$ *sse* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *é insatisfatível.*

Prova. Suponhamos, primeiro, que $\Gamma \models \alpha$. Isso significa que α é verdadeira em qualquer estrutura em que todas as fórmulas de Γ sejam verdadeiras. Agora, se $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ fosse satisfatível, deveria haver uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que todas as fórmulas de Γ, bem como $\neg\alpha$, sejam verdadeiras em $\mathfrak{A}$. Mas isto não pode ser, pois, se $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$, e portanto, $\neg\alpha$ tem que ser falsa em $\mathfrak{A}$. Logo, não existe uma tal estrutura que seja modelo de $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. De onde se segue que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é insatisfatível.

Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é insatisfatível. Se $\Gamma \not\models \alpha$, deve haver uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, e $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathsf{F}$. Ora, obviamente $\neg\alpha$ é verdadeira nesta estrutura. Logo, $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, e, portanto, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é satisfatível, o que é absurdo, pois contraria nossa hipótese. Logo, $\Gamma \models \alpha$.

Um caso particular do teorema acima, obviamente, é quando $\Gamma = \emptyset$, e então temos:

$$\models \alpha \quad \text{sse} \quad \{\neg\alpha\} \text{ é insatisfatível.}$$

Assim, para mostrar que uma fórmula é válida, basta mostrar que sua negação é sempre falsa. É essa a idéia que norteia um procedimento de prova como os tablôs.

12.2 Exemplos de tablôs

Suponhamos que quiséssemos mostrar que $(A \wedge B) \to (A \vee B)$ é uma fórmula válida (você pode verificar que é, pois é uma tautologia, construindo uma tabela de verdade para ela). A primeira coisa a fazer — o passo inicial na construção de um tablô para essa fórmula — é supor que ela *não é válida*. Por definição, se $(A \wedge B) \to (A \vee B)$ não é válida, deve existir alguma estrutura onde ela é falsa. Indicamos isto escrevendo essa fórmula numa linha, precedida do símbolo F:

$$\mathsf{F}\,(A \wedge B) \to (A \vee B)$$

Para continuar, note que essa fórmula é uma implicação, e só há um caso em que uma implicação $\alpha \to \beta$ é falsa: quando seu antecedente α é verdadeiro, e seu conseqüente β é falso. Assim, podemos escrever, abaixo de $\mathsf{F}(A \wedge B) \to (A \vee B)$, as expressões $\mathsf{V}A \wedge B$ e $\mathsf{F}A \vee B$, e ficamos com o seguinte:

$$\checkmark \mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$$
$$\mathsf{V}\,A \wedge B$$
$$\mathsf{F}\,A \vee B$$

Note que, além de acrescentar as expressões $\mathsf{V}A \wedge B$ e $\mathsf{F}A \vee B$ ao tablô, colocamos a marca '✓' ao lado de $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$: isso significa que essa fórmula foi usada (para concluir as duas linhas que seguem) e que, portanto, não precisamos mais nos ocupar dela. (Dizemos também que a fórmula foi *processada*, ou *reduzida*.) Nosso tablô, então, tem agora três fórmulas: uma já utilizada e duas novas fórmulas ainda por usar. Vamos, então, reduzir $\mathsf{V}A \wedge B$. Há igualmente apenas um caso em que uma conjunção $\alpha \wedge \beta$ é verdadeira: quando ambas, α e β, são verdadeiras. Indicamos isso como segue, marcando $\mathsf{V}A \wedge B$ com '✓' para indicar que já foi usada, como mostra a figura 12.1a.

(a)	(b)
$\checkmark \mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$	$\checkmark \mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$
$\checkmark \mathsf{V}\,A \wedge B$	$\checkmark \mathsf{V}\,A \wedge B$
$\mathsf{F}\,A \vee B$	$\checkmark \mathsf{F}\,A \vee B$
$\mathsf{V}\,A$	$\mathsf{V}\,A$
$\mathsf{V}\,B$	$\mathsf{V}\,B$
	$\mathsf{F}\,A$
	$\mathsf{F}\,B$
	$\times$

FIGURA 12.1 — Tablô para $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$.

Temos agora cinco fórmulas no tablô: duas que foram usadas (as duas primeiras, e não vamos usá-las mais) e duas que são atômicas: A e B. Com estas nada podemos fazer, pois elas não têm subfórmulas próprias. Resta a fórmula $\mathsf{F}A \vee B$, que é uma disjunção falsa. Mais uma vez, só há um caso em que uma disjunção $\alpha \vee \beta$ é falsa: quando tanto α quanto β são falsas. Vamos acrescentar isso ao nosso tablô, e marcar $\mathsf{F}A \vee B$ como usada; o resultado está na figura 12.1b.

Chegamos agora a um ponto em que não há mais fórmulas moleculares a reduzir, pois todas elas foram utilizadas. Porém, se você observar bem, vai verificar que há uma inconsistência, ou contradi-

ção, nesse tablô: por exemplo, ele contém $\mathsf{V}A$ e $\mathsf{F}A$. Ou seja, A está sendo considerada *verdadeira e falsa*. Mas isso, obviamente, é um absurdo; não há nenhuma estrutura onde uma fórmula α seja verdadeira e falsa. Assim, nossa suposição inicial de que $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ não era válida, ou seja, podia ser falsa numa estrutura, leva-nos a uma inconsistência. Isso foi representado, na figura acima, colocando-se '×' ao final do tablô — o que significa que não podemos seguir por esse caminho. E uma vez que nossa suposição inicial nos conduz a uma contradição, ela estava *errada*: $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$, ao contrário do que havíamos suposto, é, de fato, válida.

Vamos resumir o que aconteceu. Pretendíamos mostrar que uma certa fórmula é válida: começamos supondo que *não era*, e continuamos aplicando às fórmulas disponíveis no tablô algumas regras. Por exemplo, tendo uma conjunção $\mathsf{V}\,\alpha \wedge \beta$, pudemos escrever $\mathsf{V}\,\alpha$ e $\mathsf{V}\,\beta$. Como, no decorrer desse processo, chegamos a um absurdo (A tinha que ser verdadeira e falsa, por exemplo), concluímos que nossa hipótese inicial estava errada e que a fórmula original é mesmo válida.

Mas o que acontece se testamos alguma fórmula e não achamos absurdo nenhum? Vamos tomar $(A \wedge B) \rightarrow C$ como exemplo. (Essa fórmula é obviamente inválida.) Um tablô para ela começa supondo que ela seja falsa: $\mathsf{F}(A \wedge B) \rightarrow C$. Como essa é uma implicação falsa, seu antecedente é verdadeiro e seu conseqüente é falso. O resultado você vê na figura 12.2a.

(a)	(b)
$\checkmark\mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow C$	$\checkmark\mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow C$
$\mathsf{V}\,A \wedge B$	$\checkmark\mathsf{V}\,A \wedge B$
$\mathsf{F}\,C$	$\mathsf{F}\,C$
	$\mathsf{V}\,A$
	$\mathsf{V}\,B$
	?

FIGURA 12.2 — Tablô para $(A \wedge B) \rightarrow C$.

Temos agora uma conjunção verdadeira, $A \wedge B$: concluímos que tanto A quanto B são verdadeiras. O resultado está na figura 12.2b. E agora? Note que não temos nenhum absurdo, isto é, não há nenhuma fórmula α no tablô tal que $\mathsf{V}\,\alpha$ e $\mathsf{F}\,\alpha$ apareçam. E, por outro lado,

todas as fórmulas moleculares foram utilizadas: não há mais nada a fazer. Como não chegamos a uma inconsistência, nossa hipótese de que $(A \wedge B) \to C$ não fosse válida *estava correta*: ela não é válida mesmo. Note que o procedimento acima nos indica como construir uma estrutura em que $(A \wedge B) \to C$ é falsa. Isto é bem simples. A, B, e C são letras sentenciais, isto é, predicados zero-ários. Seja então $\mathcal{L} = \{A, B, C\}$ uma linguagem de primeira ordem (note que $\mathcal{L}$ contém como símbolos não-lógicos apenas aqueles que ocorrem na fórmula em questão), e seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura em que o universo é o conjunto cujo único elemento é Miau,[1] e tal que a função interpretação I é como segue:

$$I(A) = \mathbf{V}, \qquad I(B) = \mathbf{V}, \qquad I(C) = \mathbf{F}.$$

E é claro que $(A \wedge B) \to C$ é falsa na estrutura $\mathfrak{A}$. (Se você quiser, pode também verificar que, numa tabela de verdade, numa linha onde A e B são verdadeiras, e C falsa, a fórmula $(A \wedge B) \to C$ será falsa.) Assim, se uma fórmula não é válida, um tablô nos dá meios de construir uma estrutura (ou uma valoração, no caso proposicional) que mostre isso: um contra-exemplo.

Vamos ver agora mais um exemplo, ainda sem usar quantificadores. Digamos que pretendemos mostrar que $((Pa \to Pb) \wedge \neg Pb) \to \neg Pa$ é válida. Como sempre, começamos por supor que essa fórmula pode ser falsa em alguma estrutura: $\mathbf{F}\,((Pa \to Pb) \wedge \neg Pb) \to \neg Pa$. Mais uma vez, temos uma implicação falsa. Logo, seu antecedente é verdadeiro e o conseqüente, falso. Como esse antecedente é uma conjunção (verdadeira), o resultado de processá-la nos permite acrescentar seus dois elementos. O resultado de tudo isso você encontra na figura 12.3a.

Os dois próximos passos, agora, são simples: de $\mathbf{F}\neg Pa$ podemos concluir $\mathbf{V}Pa$; e de $\mathbf{V}\neg Pb$ concluímos $\mathbf{F}Pb$. (Veja a figura 12.3b.) Note, porém, que até agora não achamos inconsistência alguma. É provavelmente desnecessário dizer, mas Pa e Pb são fórmulas *distintas*; logo, $\mathbf{V}Pa$ e $\mathbf{F}Pb$ não caracterizam uma inconsistência, e você ainda

[1] Recorde-se de que o universo de uma estrutura deve ter pelo menos um elemento. No caso, podemos escolher um indivíduo qualquer para garantir isso, como Miau.

(a)	(b)
$\checkmark\,\mathsf{F}\ ((Pa \to Pb) \wedge \neg Pb) \to \neg Pa$	$\checkmark\,\mathsf{F}\ ((Pa \to Pb) \wedge \neg Pb) \to \neg Pa$
$\checkmark\,\mathsf{V}\ (Pa \to Pb) \wedge \neg Pb$	$\checkmark\,\mathsf{V}\ (Pa \to Pb) \wedge \neg Pb$
$\mathsf{F}\ \neg Pa$	$\checkmark\,\mathsf{F}\ \neg Pa$
$\mathsf{V}\ Pa \to Pb$	$\mathsf{V}\ Pa \to Pb$
$\mathsf{V}\ \neg Pb$	$\checkmark\,\mathsf{V}\ \neg Pb$
	$\mathsf{V}\ Pa$
	$\mathsf{F}\ Pb$

FIGURA 12.3 — Tablô para $((Pa \to Pb) \wedge \neg Pb) \to \neg Pa$.

não pode fechar este tablô. (Você não estava mesmo pensando que podia, não é?) Contudo, ainda temos uma fórmula não-utilizada: $\mathsf{V}\,Pa \to Pb$. Agora as coisas ficam um pouco mais difíceis, pois não há apenas um único caso em que uma implicação é verdadeira. Porém, se você conferir na definição de verdade 10.2, você verá que há uma cláusula que diz:

$$\mathfrak{A}(\alpha \to \beta) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{F} \text{ ou } \mathfrak{A}(\beta) = \mathbf{V}.$$

Ou seja, uma implicação $\alpha \to \beta$ é verdadeira (numa estrutura, numa valoração) se, *ou* α é falsa, *ou* β é verdadeira. Vamos escrever isso no nosso tablô fazendo uma *bifurcação*, ou *ramificação*. Passamos a ter agora duas continuações possíveis para o tablô: dois *ramos*.

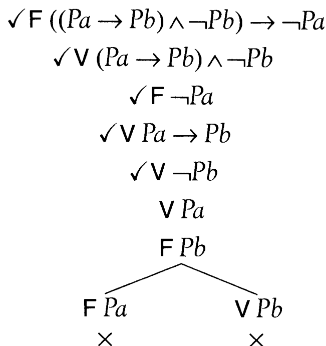


FIGURA 12.4 — Ramificação em um tablô.

Esses dois ramos, como você pode ver na figura 12.4, têm uma parte em comum: todas as sete fórmulas, desde a primeira linha até F Pb, pertencem aos dois. O ramo da esquerda, além disso, tem no final F Pa, enquanto o da direita, V Pb. A existência de dois ramos significa que há duas alternativas possíveis para tentar mostrar que nossa fórmula inicial é falsa. Porém, esse tablô contém uma inconsistência em cada um dos ramos. Olhando o ramo da esquerda, vemos que primeiro aparece V Pa, e logo mais abaixo F Pa. Ou seja, esse ramo fecha-se; por ele não é possível continuar, o que indicamos colocando como de hábito '×' ao final. De modo similar, no ramo da direita, temos F Pb, e logo abaixo, V Pb: também este ramo fecha-se. Como os *dois* ramos fecharam-se, nenhuma das alternativas pode levar a um contra-exemplo para $((Pa \to Pb) \land \neg Pb) \to \neg Pa$. Assim, nossa hipótese inicial de que essa fórmula era inválida era errônea, de onde se segue que ela é mesmo válida.

12.3 Regras para fórmulas moleculares

A partir dos exemplos vistos até agora, você talvez tenha notado que, para cada tipo de fórmula molecular, teremos duas regras: uma para tratar do caso em que ela é precedida de V, e outra para o caso em que é precedida de F. Em alguns casos, isto levou a uma bifurcação no tablô, como V $A \to B$. Em outros, não, como F $A \to B$. Antes de continuar, vamos listar todas as regras (chamadas *regras de construção do tablô*) envolvendo fórmulas moleculares (as gerais ficam para mais tarde).

Essas regras são também chamadas de *regras de expansão* porque o resultado de aplicá-las produz um acréscimo de novas fórmulas ao tablô. Como você vê na figura acima, para cada operador temos duas regras, e nessas regras podemos distinguir dois casos. Primeiro, algumas vezes há apenas uma maneira possível de assinalar valores a subfórmulas — por exemplo, quando temos uma conjunção verdadeira $\alpha \land \beta$: ambos os conjuntivos devem ser verdadeiros, se a conjunção o é. Assim, estendemos o tablô adicionando tanto V α quando V β. Algumas vezes, contudo, temos duas possibilidades: uma implicação verdadeira $\alpha \to \beta$, por exemplo, deve ter ou o antecedente

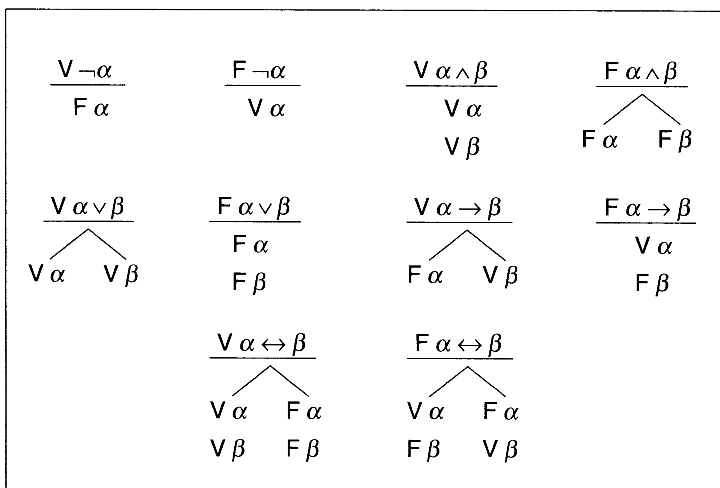


FIGURA 12.5 — Regras de construção dos tablôs.

falso, ou o conseqüente verdadeiro. De forma a considerar ambas as possibilidades, o ramo em que estamos trabalhando deve ser dividido em dois novos ramos, cada um deles representando uma maneira de continuar (uma atribuição possível). Os ramos podem, é claro, dividir-se adicionalmente em sub-ramos, e sub-sub-ramos, e esta é a razão pela qual o tablô, em muitos casos, acaba parecendo uma *árvore invertida*. (Por isso, aliás, tablôs também são chamados de *árvores de refutação*.)

Depois de ter aplicado as regras de construção, descobrimos que, no final, duas coisas podem ocorrer:

(1) Descobrimos que cada ramo leva a uma contradição, isto é, para alguma fórmula α, $\mathsf{V}\alpha$ e $\mathsf{F}\alpha$ pertencem ambas ao ramo. Nesse caso, o ramo é denominado *fechado*. Estando todos os ramos fechados, a suposição de que a fórmula original poderia ser falsa é absurda; logo, a fórmula deve ser válida.

(2) Pelo menos um ramo permanece aberto, isto é, não há mais fórmulas complexas no ramo que ainda não foram processadas, e não apareceu nenhuma contradição. Neste caso, o que fizemos

corresponde, realmente, a criar um modelo que falsifica nossa fórmula — logo, ela não é válida.

Uma vez que uma imagem é melhor que dez mil palavras, vamos examinar um tablô para $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$. O primeiro passo, claro, é supor que essa fórmula pode ser falsa. Como é uma implicação falsa, aplicamos a regra $\mathsf{F}\,\alpha \rightarrow \beta$ e obtemos então o seguinte:

$$\checkmark \mathsf{F}\,(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$$
$$\mathsf{V}\,A \vee B$$
$$\mathsf{F}\,A \wedge B$$

Para prosseguir, agora, temos duas possibilidades: uma disjunção verdadeira, ou uma conjunção falsa. Se você examinar a figura 12.5, verá que, em ambos os casos, teremos que bifurcar o tablô. Digamos que escolhemos a disjunção. O resultado você encontra na figura 12.6a abaixo.

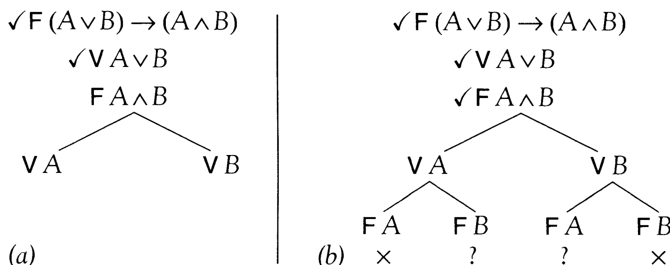


FIGURA 12.6 — Tablô para $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$.

Por enquanto, nenhuma contradição. Vamos usar agora a conjunção falsa. Também teremos uma bifurcação: mas onde bifurcar, já que temos dois ramos? Simples: a fórmula $\mathsf{F}\,A \wedge B$ pertence tanto ao ramo da direita como ao da esquerda; ela é comum aos dois. Logo, o resultado de processá-la deve ser *comum aos dois ramos*. Isso significa que cada um desses ramos vai bifurcar também. Você pode ver isso na figura 12.6b: nosso tablô tem agora quatro ramos. O primeiro deles, o mais à esquerda, fecha-se imediatamente, pois contém tanto $\mathsf{V}\,A$ quanto $\mathsf{F}\,A$. Da mesma forma, o quarto ramo, o mais à direita, que

contém tanto VB quanto FB, fecha-se. Os outros dois, assinalados com '?', continuam abertos.

Note, porém, que agora não há mais fórmulas moleculares a processar. Os ramos abertos, portanto, não vão fechar-se, o que significa que a fórmula $(A \vee B) \to (A \wedge B)$ não é válida.

Resumindo o que acabamos de aprender, se temos um tablô com vários ramos e vamos usar uma fórmula que leva a uma ramificação, o resultado deve ser acrescentado ao final de cada ramo a que essa fórmula pertence, e apenas a eles. Veja o que acontece no exemplo seguinte, por meio do qual mostramos que $(A \vee (A \to B)) \to B$ não é tautologia. Feitos os primeiros passos, teremos o seguinte tablô:

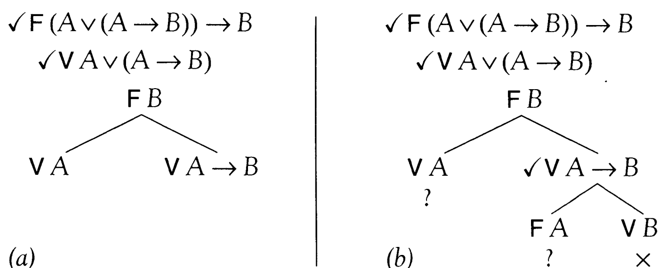


FIGURA 12.7 — Tablô para $(A \vee (A \to B)) \to B$.

O que nos resta a fazer, agora, é processar a fórmula V$A \to B$ no ramo direito. Temos uma bifurcação, pois se trata de uma implicação verdadeira. Contudo, essa implicação pertence apenas ao ramo da direita; logo, o resultado de usá-la vai apenas ao ramo da direita, como você vê na figura 12.7b.

Feito isto, temos agora três ramos. O mais à direita fecha-se, pois contém VB e FB. Como os outros dois ficam abertos, a fórmula não é válida.

Vamos resumir agora o que vimos até aqui. Um tablô para uma fórmula α qualquer é um tablô que começa com Fα. Um ramo de um tablô é chamado de *fechado* se ele contém, para alguma fórmula α, tanto Vα quanto Fα. Um ramo de um tablô chama-se *completo* se ou ele é fechado, ou todas as fórmulas moleculares que ocorrem nele foram reduzidas (isso equivale a dizer que todas elas devem ter sido marcadas com '✓').

Dizemos que um *tablô* é *completo* se cada um de seus ramos é completo. E um tablô é *fechado* se cada um de seus ramos é fechado. Dizemos, então, que um tablô fechado para uma fórmula α é uma *prova por tablôs de* α. A partir disso, pode-se demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 12.2 *Uma fórmula α é uma tautologia se e somente se existe uma prova por tablôs de α.*

Não vou demonstrar esse teorema (também conhecido como Teorema de Correção e Completude para a lógica proposicional — ou uma versão dele), pois isto nos levaria bem além do escopo deste livro. (Uma linda prova encontra-se, por exemplo, em Smullyan, 1968.) Eu gostaria de mencionar apenas que o resultado acima pode ser provado para fórmulas válidas em geral (e não apenas tautologias), e algo semelhante pode ser demonstrado no caso de conseqüência lógica.

Observe que o teorema acima prova que o nosso método de tablôs, no que se refere às tautologias, tem as duas características desejadas de correção e completude: apenas as tautologias são provadas, e prova-se que todas as tautologias são válidas.

Antes de passarmos aos exercícios, note que, se uma fórmula *não é* uma tautologia, um tablô para ela não vai nos dizer se ela é contingência ou contradição. Isso, ao contrário das tabelas de verdade, que sempre dizem em qual das três classes uma fórmula se enquadra (relativamente ao cálculo proposicional, claro, isto é, sem quantificadores).

Exercício 12.1 Determine, usando tablôs, se as fórmulas seguintes são tautologias ou não:

(a)	$(A \land B) \to B$	(j)	$((A \to Qb) \land \neg Qb) \to \neg A$
(b)	$B \to (\neg A \lor B)$	(k)	$\neg(A \lor Pb) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg Pb)$
(c)	$(Fa \lor \neg Fa) \to \neg Qb$	(l)	$\neg(B \to B) \lor (A \land \neg A)$
(d)	$(A \land B) \to \neg\neg B$	(m)	$\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \lor \neg A)$
(e)	$\neg\neg A \land (A \to B)$	(n)	$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$
(f)	$\neg\neg Pa \leftrightarrow (Pa \lor Pa)$	(o)	$(A \to (B \to C)) \to ((B \land A) \to C))$
(g)	$Lc \lor \neg(Lc \land Ts)$	(p)	$\neg Pa \to (\neg Pa \lor Qb)$
(h)	$(A \land A) \leftrightarrow A$	(q)	$(\neg(A \lor B) \land (C \leftrightarrow A)) \to \neg C$
(i)	$A \to (B \to \neg\neg A)$	(r)	$(A \lor (B \land C)) \to ((A \lor B) \land (A \lor C))$

12.4 Conseqüência lógica

O que vimos até aqui foram as regras para tablôs proposicionais (isto é, sem envolver quantificadores). Antes de passar às regras para quantificadores, vamos ver como mostrar que alguma fórmula é ou não conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas, o que é bastante simples.

Vamos outra vez começar com um exemplo. Suponhamos que queremos mostrar que a fórmula $\neg B$ é uma conseqüência (por enquanto, tautológica) do conjunto $\{(A \wedge B) \to C,\ A,\ \neg C\}$. O passo inicial é parecido: temos de supor que $\neg B$ *não é* uma conseqüência lógica desse conjunto de fórmulas. Isso significa que existe alguma estrutura em que todas as fórmulas desse conjunto são verdadeiras e a conclusão $\neg B$ é falsa. Podemos representar isso da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \mathsf{V}\,(A \wedge B) \to C \\ \mathsf{V}\,A \\ \mathsf{V}\,\neg C \\ \mathsf{F}\,\neg B \end{array}$$

Note que agora, dado esse passo inicial, só precisamos prosseguir com a construção do tablô. De $\mathsf{V}\neg C$ temos $\mathsf{F}C$, e de $\mathsf{F}\neg B$ temos $\mathsf{V}B$. A implicação verdadeira na primeira linha nos leva a uma bifurcação, e ficamos, então, com dois ramos. O ramo da direita fecha-se imediatamente, pois contém $\mathsf{V}C$ e $\mathsf{F}C$. O outro continua aberto, mas temos ainda uma conjunção falsa a usar, que nos leva a nova bifurcação e, finalmente, ao fechamento de todos os ramos. O tablô completo você encontra na figura 12.8.

Resumindo, a única diferença com relação à determinação de validade é que, agora, em vez de começarmos com uma única fórmula, começamos com *várias*. A partir daí, tudo segue como antes. E, obviamente, para que uma fórmula α seja conseqüência de algum conjunto de fórmulas Γ, todos os ramos do tablô têm que se fechar. Se algum ficar aberto, então α não é conseqüência lógica de Γ. O ramo aberto, analogamente ao caso da determinação de validade, nos permite construir uma estrutura em que todas as fórmulas de Γ são verdadeiras e α, falsa.

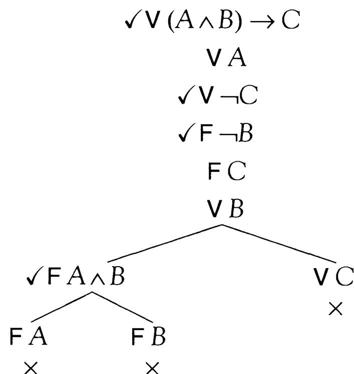


FIGURA 12.8 — Tablô mostrando que $(A \wedge B) \rightarrow C, A, \neg C \models \neg B$.

Se Γ é um conjunto finito de fórmulas, e α uma fórmula, vamos definir um tablô para $\Gamma \cup \{\alpha\}$ como um tablô que se inicia com $\mathsf{V}\gamma$, para toda $\gamma \in \Gamma$, e $\mathsf{F}\alpha$. Além disso, se há um tablô fechado para $\Gamma \cup \{\alpha\}$, dizemos que α é *conseqüência por tablôs* de Γ. Com base nisso, podemos demonstrar agora uma versão mais forte do teorema de correção e completude que vimos antes, a saber:

Teorema 12.3 *Uma fórmula α é uma conseqüência tautológica de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se α é conseqüência por tablôs de Γ.*

O teorema 12.2, claro, é um caso especial do teorema acima, em que temos $\Gamma = \varnothing$.

Como você viu a partir dessas considerações, o método dos tablôs nos dá um procedimento mecânico para decidir, sempre, se uma certa fórmula é ou não uma tautologia, ou se é ou não conseqüência lógica de algum conjunto de fórmulas. Note também que esse método, até agora, para a lógica proposicional, sempre dá uma resposta. Cada fórmula processada é marcada com '√', o que significa que foi usada e não será usada novamente. Eventualmente todas as fórmulas acabam sendo usadas (a menos que o tablô se feche primeiro), pois cada vez que usamos uma, o resultado são subfórmulas, cada vez menores, dela. Eventualmente, chegamos até as fórmulas atômicas, que não podem ser mais processadas. O resultado final é um tablô fechado,

ou aberto, e temos, no caso proposicional (ou seja, sem quantificadores), uma resposta à nossa questão inicial.

Exercício 12.2 Determine, nos casos abaixo, se as conclusões indicadas (as fórmulas à direita de $\models$) são conseqüência lógica ou não das demais:

(a) $A \vee B,\ \neg A \models B$
(b) $Pa \leftrightarrow Qb,\ \neg Pa \models \neg Qb$
(c) $\neg(B \wedge A) \models \neg B \wedge \neg A$
(d) $A \rightarrow B \models A \vee B$
(e) $\neg Pa \rightarrow \neg Qb \models Pa \rightarrow Qb$
(f) $Pa,\ Pa \rightarrow C \models Pa \leftrightarrow C$
(g) $B \rightarrow \neg Cb \models \neg(B \wedge Cb)$
(h) $A \models (A \rightarrow (Qb \wedge A)) \rightarrow (A \wedge Qb)$
(i) $(Ba \wedge Ca) \rightarrow Fb,\ \neg Ba,\ \neg Ca \models \neg Fb$
(j) $\neg(A \vee B),\ Fa \leftrightarrow A \models \neg Fa$
(k) $\neg(A \wedge B),\ Fa \leftrightarrow A \models \neg Fa$
(l) $Pa \leftrightarrow Pb,\ Pb \leftrightarrow Pc \models Pa \leftrightarrow Pc$
(m) $A \rightarrow (B \vee Sb),\ (B \wedge Sb) \rightarrow Qa \models A \rightarrow Qa$
(n) $(\neg A \vee B) \vee C,\ (B \vee C) \rightarrow D \models A \rightarrow D$
(o) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \models A$

12.5 Quantificadores

Para completar nosso conjunto de regras de construção de tablôs, precisamos ver ainda as regras que nos permitem lidar com os quantificadores.

É claro que podemos construir tablôs para algumas fórmulas contendo quantificadores, e mesmo mostrar que são válidas, como fizemos com as tabelas de verdade. Por exemplo, é fácil ver que a fórmula $\forall xQx \rightarrow \forall xQx$ é válida (na verdade, ela é uma instância de tautologia). Supondo que ela fosse falsa, teríamos que ter, em nosso tablô, seu antecedente verdadeiro e seu conseqüente falso, ou seja, teríamos que ter $\mathsf{V}\,\forall xQx$ e $\mathsf{F}\,\forall xQx$, o que fecha imediatamente o (único) ramo desse tablô.

Entretanto, as regras que temos até aqui nos permitem apenas decidir se certas fórmulas são tautologias ou não. E, como você se recorda, existem muitas outras fórmulas válidas, além das tautologias.

Vamos começar tomando $\forall xPx \rightarrow Pa$ como exemplo. Você há de concordar que ela é uma fórmula válida. (Informalmente, ela poderia dizer algo como 'Se todos são poetas, então Aristóteles é poeta', o que parece ser indiscutível.) Bem, vamos fazer um tablô para mostrar a validade dessa fórmula. O passo inicial, claro, é supor que ela pode ser falsa, ou seja, escrevemos $\mathsf{F}\,\forall xPx \rightarrow Pa$ na primeira linha do tablô. E como temos uma implicação falsa, podemos reduzir essa fórmula, obtendo então o seguinte:

$$\begin{array}{c} \checkmark\,\mathsf{F}\,\forall xPx \rightarrow Pa \\ \mathsf{V}\,\forall xPx \\ \mathsf{F}\,Pa \end{array}$$

Até aqui não temos nenhuma inconsistência, mas temos no tablô a fórmula $\mathsf{V}\,\forall xPx$, que não foi usada ainda. A regra que nos permite usá-la tem a seguinte justificação: se é verdade que todos são poetas, então é verdade que Aristóteles é poeta. Dito de outra forma, se todos têm a propriedade (simbolizada por) P, então a tem P, b tem P etc. Ou seja, se temos $\mathsf{V}\,\forall xPx$ num ramo de um tablô, então podemos escrever $\mathsf{V}\,Pa$, $\mathsf{V}\,Pb$, $\mathsf{V}\,Pc$ etc. nesse ramo. Claro, no presente exemplo estamos interessados apenas em obter $\mathsf{V}\,Pa$, o que nos permite fechar o tablô, pois já temos $\mathsf{F}\,Pa$. Assim, nosso tablô fica:

$$\begin{array}{c} \checkmark\,\mathsf{F}\,\forall xPx \rightarrow Pa \\ \mathsf{V}\,\forall xPx \\ \mathsf{F}\,Pa \\ \mathsf{V}\,Pa \\ \times \end{array}$$

E, uma vez que o único ramo do tablô se fecha, $\forall xPx \rightarrow Pa$ é válida. Note, agora, que não marcamos a fórmula $\mathsf{V}\,\forall xPx$ com '✓', como costumamos fazer sempre que uma fórmula é reduzida. A explicação é a seguinte: quando processamos uma fórmula molecular, digamos, $\mathsf{V}\,A \wedge B$, acrescentando $\mathsf{V}\,A$ e $\mathsf{V}\,B$ ao tablô, essa conjunção não é mais necessária, pois toda a "informação" contida nela (que seus dois elementos são verdadeiros) já foi extraída e acrescentada ao tablô. No caso de $\mathsf{V}\,\forall xPx$, porém, o que está dito é que *todos* têm a propriedade simbolizada por P. Todavia, não acrescentamos isso ao tablô:

escrevemos apenas que *a* tem *P*. E *b*, e *c*, contudo? O único caso em que poderíamos marcar V∀*xPx* com '✓' seria se acrescentássemos ao tablô uma lista infinita: V*Pa*, V*Pb*, V*Pc* etc. Mas isto é impraticável. Assim, a saída é não marcar a fórmula V∀*xPx*, mas deixá-la à disposição para usos futuros, se for necessário.

A regra para uma fórmula universal verdadeira, portanto, é a seguinte: se você tem V∀**x**α em um ramo de um tablô, você pode escrever Vα[**x**/**c**] nesse ramo, onde α[**x**/**c**] é o resultado de substituir todas as ocorrências livres de **x** em α pela constante **c**.[2] Porém, V∀**x**α não é marcada com '✓', isto é, ela pode ser usada tantas vezes quanto se queira.

No exemplo seguinte — mostrar que ∀*xPx* → (*Pa* ∧ *Pb*) é válida — temos um caso no qual é necessário reutilizar uma fórmula universal verdadeira. Os passos iniciais do tablô você encontra na figura 12.9a. Tendo agora uma conjunção falsa, o tablô ramifica, e temos, então, o que aparece na figura 12.9b.

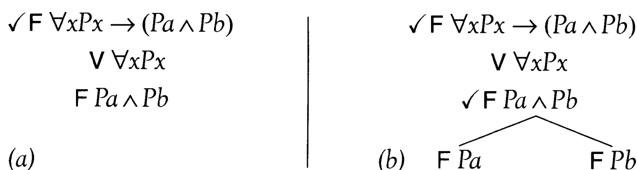


FIGURA 12.9 — Tablô para ∀*xPx* → (*Pa* ∧ *Pb*).

Vamos utilizar agora a fórmula V∀*xPx*. Ela é comum aos dois ramos; portanto, o resultado obtido deve ser colocado nos dois. Suponhamos que a usemos para *a*, acrescentando V*Pa* aos dois ramos do tablô. O resultado você vê na figura 12.10a.

Note que o ramo da esquerda se fecha, mas o da direita, não. Contudo, isso pode ser alcançado se usarmos V∀*xPx* mais uma vez, agora substituindo *x* por *b*. Como o ramo esquerdo está fechado, coloca-

[2]A versão do método de tablôs que estou apresentando trata apenas de sentenças, isto é, fórmulas fechadas; por isso a insistência em que a variável seja substituída por uma constante. Para aplicar o método a fórmulas abertas, teremos que aplicá-lo ao *fecho* delas. Por outro lado, nada impede que se tenha uma versão do método de tablôs que trabalhe com fórmulas abertas. Ver, por exemplo, Fitting, 1990, cap. 7.

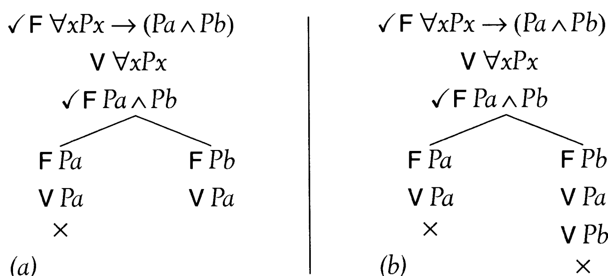


FIGURA 12.10 — Tablô para $\forall x Px \rightarrow (Pa \wedge Pb)$.

mos VPb apenas no ramo direito, que, assim, também se fecha (figura 12.10b). Logo, a fórmula é válida.

Vamos ver agora o caso no qual temos uma fórmula existencial verdadeira (as fórmulas gerais falsas ficam para logo mais). Digamos que queremos mostrar que $\exists x \neg Px \rightarrow \neg\forall x Px$ (ou seja, 'Se alguém não é poeta, nem todos são poetas', por exemplo) é válida. Feitos os passos iniciais, isto é, reduzindo a fórmula inicial, e o conseqüente, que é uma negação, temos o que você vê a seguir:

$$\begin{array}{c} \checkmark \mathsf{F}\ \exists x \neg Px \rightarrow \neg\forall x Px \\ \mathsf{V}\ \exists x \neg Px \\ \checkmark \mathsf{F}\ \neg\forall x Px \\ \mathsf{V}\ \forall x Px \end{array}$$

Temos agora duas fórmulas para usar, a saber, V$\exists x \neg Px$ e V$\forall x Px$. Como uma fórmula universal verdadeira pode ser usada tantas vezes quantas quisermos, e não temos ainda uma constante pela qual substituir x, vamos deixá-la para depois e examinar V$\exists x \neg Px$ primeiro. Esta diz que alguém não tem a propriedade P — mas *quem*? Bem, não sabemos: pode ser a, b, c etc. Que fazer, então?

Simples. Vamos escolher alguma constante que não tenha ainda aparecido no ramo do tablô em que estamos trabalhando (no caso, só há um ramo), digamos, a constante a, e vamos acrescentar, então, V$\neg Pa$ ao ramo. A idéia é que a constante a vai ser o nome daquele indivíduo que não tem P: sabemos que algum não tem essa propriedade; vamos, então, chamá-lo de a. Feito isso, marcamos a

fórmula V$\exists x \neg Px$. Ao contrário das fórmulas universais verdadeiras, que valem para todos, uma fórmula existencial vale, em princípio, para um indivíduo. Como já acrescentamos isso ao tablô (chamando o indivíduo em questão de a), a fórmula existencial pode ser esquecida. Assim, ficamos com o tablô na figura 12.11a. Como temos agora uma negação verdadeira, essa fórmula é processada para obter FPa. E agora podemos usar a universal verdadeira V$\forall xPx$, substituindo x por a, o que nos permite acrescentar VPa ao tablô, que então se fecha, como você vê na figura 12.11b.

(a)	(b)
✓F $\exists x \neg Px \rightarrow \neg\forall xPx$	✓F $\exists x \neg Px \rightarrow \neg\forall xPx$
✓V $\exists x \neg Px$	✓V $\exists x \neg Px$
✓F $\neg\forall xPx$	✓F $\neg\forall xPx$
V $\forall xPx$	V $\forall xPx$
V $\neg Pa$	✓V $\neg Pa$
	F Pa
	V Pa
	×

FIGURA 12.11 — Tablô para $\exists x \neg Px \rightarrow \neg\forall xPx$.

A regra para uma fórmula existencial verdadeira, portanto, é a seguinte: se você tem V$\exists \mathbf{x}\alpha$ num ramo de um tablô, pode acrescentar V$\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]$ a este ramo, isto é, o resultado de substituir todas as ocorrências livres de **x** em α por **c**, desde que **c** seja alguma constante que ainda não apareceu no ramo onde V$\exists \mathbf{x}\alpha$ ocorre. Além disso, V$\exists \mathbf{x}\alpha$ é marcada com '✓', isto é, ela pode ser usada apenas uma vez.

Só nos faltam agora as regras para fórmulas gerais falsas, que vão ser parecidas com as que vimos acima. Por exemplo, se temos F$\forall xPx$ em um ramo, isso significa que nem todos possuem a propriedade P. E se nem todos possuem, há alguém que não tem P. Digamos, um a qualquer. Assim, podemos escrever FPa no ramo (desde que a seja uma constante nova no ramo), e marcar F$\forall xPx$. Como você vê, a regra de um universal falso é parecida com a do existencial verdadeiro.

A regra para uma fórmula universal falsa, portanto, é a seguinte: se você tem F$\forall \mathbf{x}\alpha$ num ramo de um tablô, pode acrescentar F$\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]$

a esse ramo, isto é, o resultado de substituir todas as ocorrências livres de **x** em α por **c**, desde que **c** seja alguma constante que ainda não apareceu no ramo onde ocorre F$\forall$**x**α. Além disso, F$\forall$**x**α é marcada com '✓', isto é, ela pode ser usada apenas uma vez.

Analogamente, então, um existencial falso deve ser como um universal verdadeiro: se temos F$\exists xPx$, então ninguém tem a propriedade P. Ou seja, a não tem P, b não tem P, e assim por diante. Portanto, podemos acrescentar FPa, FPb etc. ao ramo do tabló. Ou seja, uma fórmula existencial falsa (como uma universal verdadeira) é reutilizável.

A regra para uma fórmula existencial falsa, portanto, é a seguinte: se você tem F$\exists$**x**α num ramo de um tabló, você pode escrever Fα[**x**/**c**], isto é, o resultado de substituir todas as ocorrências livres de **x** em α por **c**. Porém, F$\exists$**x**α não é marcada com '✓'; isto é, ela pode ser usada tantas vezes quanto se queira.

Você encontra um resumo destas regras na figura 12.12.

V$\forall$**x**α / Vα[**x**/**c**]	F$\forall$**x**α / Fα[**x**/**c**]	V$\exists$**x**α / Vα[**x**/**c**]	F$\exists$**x**α / Fα[**x**/**c**]
para qualquer **c**	desde que **c** seja nova no ramo	desde que **c** seja nova no ramo	para qualquer **c**

FIGURA 12.12 — Regras para fórmulas quantificadas.

Um último exemplo a respeito de validade. Vamos mostrar que $(\forall xPx \wedge \forall xQx) \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$ é válida. Feitos os passos iniciais, ficamos com a seguinte situação: temos duas fórmulas universais verdadeiras, V$\forall xPx$ e V$\forall xQx$, e uma existencial falsa, F$\exists x(Px \wedge Qx)$. Qual delas vamos usar primeiro? Neste caso, fica difícil dizer: todas as três fórmulas são reutilizáveis, mas não há nenhuma ocorrência de uma constante individual no tabló (o que poderia nos dar uma pista, ao eliminarmos um quantificador, sobre o que colocar no lugar

da variável que estava quantificada). Num caso como esse, escolhemos aleatoriamente uma fórmula, e trocamos a variável por uma constante qualquer. Digamos que usemos o existencial falso primeiro, trocando x pela constante a: assim, acrescentamos F $Pa \wedge Qa$ ao tablô. Tendo agora uma conjunção falsa, o próximo passo nos leva a uma ramificação, como você vê na figura 12.13a.

Vamos usar agora um dos universais verdadeiros. De V $\forall xPx$ acrescentamos V Pa aos ramos abertos, e o da esquerda fecha-se imediatamente. Usando, então, V $\forall xQx$, acrescentamos agora V Qa ao ramo direito, e o tablô se fecha (cf. figura 12.13b). Logo, a fórmula é válida.

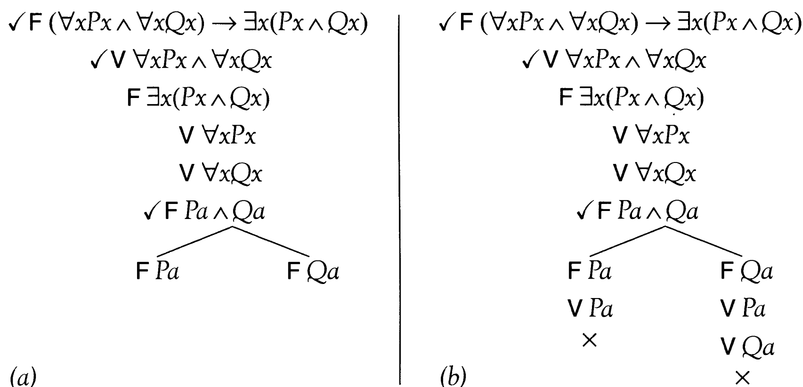


FIGURA 12.13 — Tablô para $(\forall xPx \wedge \forall xQx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$.

A propósito, como V $\forall xPx$ é reutilizável, você não precisaria ter escrito V Pa no ramo direito (pois você não iria precisar dele lá). Caso você precisasse, poderia usar V $\forall xPx$ trocando x por *a outra vez* — o que é permitido. Contudo, é boa política acrescentar o resultado da utilização de uma fórmula em todos os ramos abertos, pois isso terá uma importância depois, quando falarmos de *invalidade* (até agora todos os exemplos eram de fórmulas *válidas*, você notou?).

Com relação a mostrar que algo é ou não conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas, nada se alterou, a não ser a introdução das novas regras. Você começa supondo que as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa, e prossegue normalmente. Por exemplo, digamos que você queira mostrar que $\forall x\exists yLxy$ é conseqüência lógica

de $\exists y \forall x Lxy$. Começamos supondo que a premissa é verdadeira, e a conclusão falsa, ou seja:

$$\begin{array}{c} \mathsf{V}\ \exists y \forall x Lxy \\ \mathsf{F}\ \forall x \exists y Lxy \end{array}$$

Tendo agora um existencial verdadeiro, e um universal falso, reduzimos essas duas fórmulas, lembrando de introduzir uma constante nova para cada uma, ficando, então, com o seguinte:

$$\begin{array}{c} \checkmark\mathsf{V}\ \exists y \forall x Lxy \\ \checkmark\mathsf{F}\ \forall x \exists y Lxy \\ \mathsf{V}\ \forall x Lxa \\ \mathsf{F}\ \exists y Lby \end{array}$$

Ambas as fórmulas não utilizadas, agora, são do tipo "vale para todos". Para obter a contradição desejada, vamos substituir o x em $\mathsf{V}\,\forall x Lxa$ por b, e o y em $\mathsf{F}\,\exists y Lby$ por a. O resultado é:

$$\begin{array}{c} \checkmark\mathsf{V}\ \exists y \forall x Lxy \\ \checkmark\mathsf{F}\ \forall x \exists y Lxy \\ \mathsf{V}\ \forall x Lxa \\ \mathsf{F}\ \exists y Lby \\ \mathsf{V}\ Lba \\ \mathsf{F}\ Lba \\ \times \end{array}$$

E o tablô se fecha. Logo, $\exists y \forall x Lxy \models \forall x \exists y Lxy$.

Bem, assim como mencionamos anteriormente o teorema de correção e completude (nas suas versões forte e fraca) para a lógica proposicional, devemos mencionar que ele vale também no caso geral do **CQC**, isto é, para conseqüência lógica em geral, e não apenas conseqüência tautológica. Ou seja, a versão final do teorema de correção e completude é:

Teorema 12.4 *Uma fórmula α é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se α é conseqüência lógica por tablôs de Γ.*

Exercício 12.3 Mostre, usando tablôs, que as fórmulas seguintes são todas válidas:

(a) $\forall x Rxx \to Raa$
(b) $\neg\exists x Rxx \to \neg Raa$
(c) $\forall x(Px \to Px)$
(d) $\neg\exists x(Px \wedge \neg Px)$
(e) $\forall x(Ax \to Bx) \to (\forall x Ax \to \forall x Bx)$
(f) $\forall x(Ax \to Bx) \to (\exists x Ax \to \exists x Bx)$
(g) $\forall x(Ax \wedge Bx) \to (\forall x Ax \wedge \forall x Bx)$
(h) $(\forall x Ax \wedge \forall x Bx) \to \forall x(Ax \wedge Bx)$
(i) $(\exists x Ax \vee \exists x Bx) \to \exists x(Ax \vee Bx)$
(j) $\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$
(k) $\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$
(l) $\forall x Px \leftrightarrow \neg\exists x \neg Px$
(m) $\exists x Px \leftrightarrow \neg\forall x \neg Px$
(n) $\exists y \forall x Rxy \to \forall x \exists y Rxy$
(o) $(\forall x Px \vee \forall x Qx) \to \forall x(Px \vee Qx)$
(p) $\exists x(Px \wedge Qx) \to (\exists x Px \wedge \exists x Qx)$

Exercício 12.4 Mostre, usando tablôs, que as conclusões indicadas são de fato conseqüência lógica das premissas:

(a) $\exists x Ax \to \exists x Bx, \neg\exists x Bx \vDash \neg\exists x Ax$
(b) $\forall x Px \to \forall x Qx, \forall x Px \vDash Qb$
(c) $\exists x Px \to \forall x Qx, \neg\exists x Qx \vDash \neg Pa$
(d) $\forall x(Ax \to Bx), \exists x \neg Bx \vDash \exists x \neg Ax$
(e) $\forall x(Px \to Qx), Pa \vDash Qa$
(f) $\forall x(Px \to Qx), \neg Qb \vDash \neg Pb$
(g) $\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), Fc \vDash Gc$
(h) $\forall x(Px \vee Qx), \neg Qb \vDash Pb$
(i) $\forall x((Ax \vee Bx) \to Cx), Ab \vDash Cb$
(j) $\forall x(Px \to Qx), \forall x(Qx \to Rxb) \vDash Pa \to Rab$
(k) $\forall x Fx \wedge \forall y Hy, \forall z \forall x Tzx \vDash Fa \wedge Tab$
(l) $\forall x \neg Px, \forall x(Cx \to Px), Fa \vee Cb \vDash Fa$
(m) $\forall x(Px \wedge Qx) \vDash \forall x Px \wedge \forall x Qx$
(n) $\forall x Px \to \forall x Qx, \neg Qa \vDash \neg\forall x Px$
(o) $\forall x(Px \to Qx), \forall x Px \vDash \forall x Qx$
(p) $\forall x(Sx \to \neg Rx), \forall x(Px \to Sx) \vDash \forall x(Px \to \neg Rx)$
(q) $\forall x Pbx, \forall x \forall y(Pxy \to Syx) \vDash \forall x Sxb$
(r) $\forall x(Px \to Qx), \exists x Px \vDash \exists x Qx$

(s) $\forall x(Px \to Qx), \exists x \neg Qx \vDash \exists x \neg Px$
(t) $\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), \exists x Fx \vDash \exists x Gx$
(u) $\forall x(Px \vee Qx), \exists y \neg Qy \vDash \exists z Pz$
(v) $\forall x((Ax \vee Bx) \to Cx), \exists x Ax \vDash \exists x Cx$

12.6 Invalidade

O caso de mostrar, porém, que alguma fórmula é inválida, ou que não é conseqüência lógica de algum conjunto de fórmulas, é um pouco mais delicado. Em muitos casos, naturalmente, isso pode ser feito sem problemas; por exemplo, é fácil de ver que $Pa \to \forall x Px$ é inválida. Um tablô completo para ela seria o seguinte:

$$\checkmark \mathsf{F}\ Pa \to \forall x Px$$
$$\mathsf{V}\ Pa$$
$$\checkmark \mathsf{F}\ \forall x Px$$
$$\mathsf{F}\ Pb$$
$$?$$

Como você pode ver, todas as fórmulas não-atômicas estão marcadas com '✓', ou seja, foram usadas, e não há mais nada a fazer: logo, $Pa \to \forall x Px$ é inválida. E é fácil, a partir disso, construir uma estrutura em que tal aconteça. Basta que Pa seja verdadeira nessa estrutura, e que $\forall x Px$ seja falsa. A seguinte estrutura permite fazer isso:

$$\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle, \quad A = \{0, 1\}, \quad I(a) = 0, \quad I(P) = \{0\}.$$

Como $I(a)$, que é 0, pertence a $I(P)$, temos $\mathfrak{A}(Pa) = \mathsf{V}$. Como, porém, $1 \notin I(P)$, temos que $\mathfrak{A}(\forall x Px) = \mathsf{F}$, como pretendíamos.

Este, porém, foi um caso fácil. Suponhamos que tentássemos agora construir um tablô para $\forall x(Px \vee Qx) \to (\forall x Px \vee \forall x Qx)$, que não é válida. Feitos todos os passos, teríamos a construção na figura 12.14.

Note que, com exceção de $\mathsf{V}\ \forall x(Px \vee Qx)$, todas as fórmulas foram usadas; porém, não temos inconsistências que fechem todos os ramos. Contudo, não podemos dizer que o tablô está completo, pois há uma fórmula que não é atômica e ainda não foi marcada com '✓'. Por outro lado, é óbvio que usá-la outra vez não vai levar a nada.

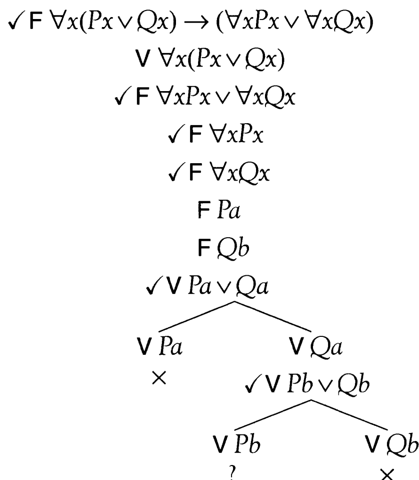


FIGURA 12.14 — Tablô para $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$.

Substituir x por c, d etc. não ajuda. E por a e b não deu mesmo em nada. E agora?

A solução é a seguinte. Vamos definir uma noção parecida com a de tablô completo: a de um tablô *terminado*. Dizemos que um ramo de um tablô está terminado se ele está ou fechado, ou então:

(1) todas as fórmulas moleculares que ocorrem no ramo foram utilizadas;

(2) todos os existenciais verdadeiros que ocorrem no ramo, e todos os universais falsos, foram utilizados;

(3) para cada fórmula universal verdadeira ou existencial falsa no ramo, há uma instância sua para cada constante que ocorre no ramo.

Um tablô é dito então terminado se todos os seus ramos estão terminados. O tablô da figura 12.14 é um tablô terminado, como você pode ver. Por outro lado, o tablô apresentado na figura 12.15a não está terminado. O ramo esquerdo está fechado, mas o direito, não. E, embora todas as fórmulas moleculares e o universal falso do ramo

tenham sido usados, a fórmula $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ foi usada nesse ramo apenas para a constante a. Contudo, b também ocorre no ramo; assim, para que o ramo direito fique terminado também, precisamos usar $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ mais uma vez, agora trocando x por b. O resultado você vê na figura 12.15b: a fórmula V $Fb \rightarrow Gb$ foi acrescentada e logo utilizada, produzindo dois sub-ramos. O da direita, então, fechou-se, pois continha F Gb e V Gb. O sub-ramo esquerdo, contudo, continua aberto. Porém, esse ramo está terminado, como você pode facilmente verificar, pois satisfaz os requisitos (1)–(3) acima. Assim, concluímos que $\forall xGx$ não é conseqüência lógica das outras fórmulas.

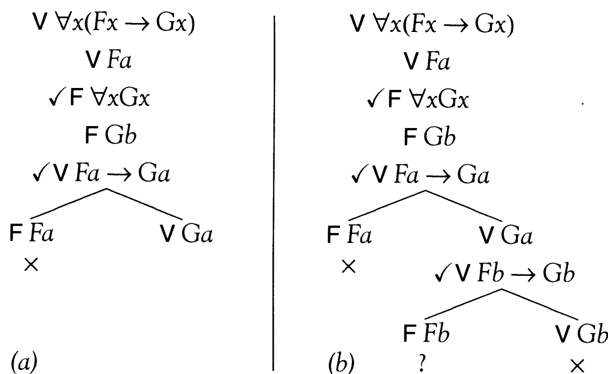


FIGURA 12.15 — Tablô mostrando que $\forall x(Fx \rightarrow Gx), Fa \not\models \forall xGx$.

Podemos provar, mas não o faremos aqui, que se um tablô aberto está terminado, nada que se faça no tablô vai ajudar a fechá-lo. Isto é, é impossível fechá-lo; portanto, não é necessário continuar.

Exercício 12.5 As fórmulas seguintes são todas inválidas. Mostre isso usando tablôs:

(a) $Pa \rightarrow \forall xPx$

(b) $\exists xPx \rightarrow Pa$

(c) $(\exists xPx \land \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \land Qx)$

(d) $\forall x(Ax \lor Bx) \rightarrow (\forall xAx \lor \forall xBx)$

(e) $\exists x(Px \rightarrow Qa) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow Qa)$

(f) $(\forall xPx \rightarrow \forall xQx) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Qx)$

Exercício 12.6 Determine se as fórmulas à direita de '$\models$' são conseqüência lógica ou não das demais:

(a) $\exists xFx \vee \exists xHx \models \exists x(Fx \vee Hx)$
(b) $\exists xPbx, \forall x\forall y(Pxy \rightarrow Syx) \models \exists xSxb$
(c) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \exists x\neg Qx \models \neg\forall xPx$
(d) $\exists xAx \rightarrow \exists xBx, \exists x\neg Bx \models \exists x\neg Ax$
(e) $\forall x(Px \wedge \neg Rxb), \exists x(\neg Qx \vee Rxb), \forall x(\neg Rxb \rightarrow Qx) \models \exists yRyb$
(f) $\forall x(Fx \rightarrow Cx), \exists x(Ax \wedge Fx) \models \exists x(Ax \wedge Cx)$
(g) $\forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall z(Tz \rightarrow Fz), \exists y(Ty \wedge Qy) \models \exists x(Hx \wedge Qx)$
(h) $\forall x(Fx \rightarrow Cx), \exists x(Ax \wedge Fx) \models \exists x(Ax \wedge Cx)$
(i) $\exists xPx \wedge \exists xQx \models \exists x(Px \wedge Qx)$
(j) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \exists x\neg Qx \models \neg\forall xPx$
(k) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \models \forall xQx$
(l) $\forall x(Px \wedge \neg Rxb), \exists x(\neg Qx \vee Rxb), \forall x(\neg Rxb \rightarrow Qx) \models \exists yRyb$
(m) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xPx \models \exists xQx$
(n) $\forall x(Sx \rightarrow \neg Rx), \forall x(Px \rightarrow Sx), Pa \models \exists x(Px \rightarrow \neg Rx)$
(o) $\forall x(Sx \rightarrow \neg\neg Rx), \forall x(\neg Px \rightarrow Sx), Pa \models \exists x(Px \rightarrow \neg Rx)$
(p) $\neg\exists xFx \vee \neg\exists xHx \models \neg\exists x(Fx \vee Hx)$
(q) $\exists xPbx, \forall x\forall y(Pxy \rightarrow Syx) \models \exists xSxb$
(r) $\forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall z(Tz \rightarrow Fz), \exists y(Ty \wedge Qy) \models \exists x(Hx \wedge Qx)$
(s) $\forall xPx \models \forall y(Ryb \rightarrow Py)$
(t) $\forall z(Qz \rightarrow \forall y(Ry \rightarrow Szy)), \forall z(Qz \rightarrow \forall y(Szy \rightarrow Py)), \exists xQx \models \forall y(Ry \rightarrow Py)$

12.7 Indecidibilidade do CQC

Há ainda tablôs que nunca podem ser terminados. Vamos considerar o clássico exemplo

$$\forall x\exists yLxy \not\models Laa.$$

É possível mostrar, construindo uma estrutura que sirva de contraexemplo, que Laa não é conseqüência lógica de $\forall x\exists yLxy$. Seja $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$, onde $A = \{0, 1\}$, e I é tal que:

$$I(a) = 0, \quad I(L) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}.$$

É fácil ver que *Laa* é falsa em $\mathfrak{A}$, pois $\langle 0,0\rangle \notin I(L)$. Por outro lado, podemos verificar que $\mathfrak{A}(\forall x\exists y Lxy) = \mathbf{V}$, pois para cada elemento *x* de *A* existe um elemento *y* tal que *Lxy*: se dermos a 1 o nome *b*, vemos que $\mathfrak{A}(Lab) = \mathbf{V}$, e que $\mathfrak{A}(Lbb) = \mathbf{V}$.

Contudo, se tentarmos construir um tablô para decidir se *Laa* é ou não conseqüência lógica de $\forall x\exists y Lxy$, vamos perceber que esse tablô nunca termina. Veja só: como a constante *a* ocorre no (único) ramo, temos que instanciar a fórmula $\forall x\exists y Lxy$ em *a*, ficando com o seguinte:

$$\begin{array}{c} \mathsf{V}\ \forall x\exists y Lxy \\ \mathsf{F}\ Laa \\ \mathsf{V}\ \exists y Lay \end{array}$$

Ora, tal instanciação introduziu uma fórmula existencial verdadeira, que deve ser processada para que o tablô seja considerado terminado. Digamos que façamos isso, introduzindo uma nova constante *b*. O resultado é:

$$\begin{array}{c} \mathsf{V}\ \forall x\exists y Lxy \\ \mathsf{F}\ Laa \\ \checkmark\mathsf{V}\ \exists y Lay \\ \mathsf{V}\ Lab \end{array}$$

Contudo, uma vez que temos uma nova constante no ramo, devemos instanciar a fórmula universal para essa constante também, gerando uma nova fórmula existencial verdadeira, que deve ser reduzida, introduzindo uma nova constante. O resultado é:

$$\begin{array}{c} \mathsf{V}\ \forall x\exists y Lxy \\ \mathsf{F}\ Laa \\ \checkmark\mathsf{V}\ \exists y Lay \\ \mathsf{V}\ Lab \\ \checkmark\mathsf{V}\ \exists y Lby \\ \mathsf{V}\ Lbc \end{array}$$

É óbvio que esse procedimento vai se repetir ao infinito, criando novas instâncias de $\forall x\exists y Lxy$ para cada constante nova introduzida pela redução da fórmula existencial anterior. Assim, o tablô nunca vai terminar. E é óbvio também que esse ramo do tablô nunca vai

fechar, pois *Laa* não é conseqüência lógica de $\forall x \exists y Lxy$, como prova a estrutura apresentada anteriormente.

A triste conclusão indicada pelo que vimos acima é que, em alguns casos em que uma fórmula é inválida, ou em que alguma fórmula não é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas, a tentativa de construir um tablô não vai nos dar uma resposta. Ou seja, ainda que os tablôs sejam um procedimento mecanizável de forma determinística, eles não constituem um algoritmo para decidir, em geral, a validade no **CQC**. (Lembre-se de que um algoritmo é um procedimento que *sempre* produz uma resposta.)

Talvez você pense agora que os tablôs foram formulados inadequadamente, ou que poderíamos alterar a definição de tablô terminado para dar conta do caso acima. Na verdade, nada resolve o problema. Já em 1936 o lógico americano Alonzo Church (1903–1995) demonstrou que o **CQC** é *indecidível*: não existe um método mecânico que diga sempre se uma fórmula é válida ou não.

Claro, pelo teorema de completude, se uma fórmula é válida, existe uma prova para ela por tablôs e, mais cedo ou mais tarde, um procedimento de prova vai encontrá-la. A questão é esse "mais cedo ou mais tarde": não há um mecanismo que sempre ache essa prova em um tempo razoável. Assim, suponha que você escreveu um programa de computador que fique procurando uma prova por tablôs de alguma α. Se, depois de uma semana, o programa ainda está rodando e não deu uma resposta, isto significa que α é inválida? Não, porque pode ser que a resposta positiva venha no dia seguinte, ou mesmo daí a cinco minutos. (Você se lembra de quanto tempo é necessário para construir uma tabela de verdade?) A questão prática é que você nunca sabe, depois de uma semana, se α é mesmo inválida. Quem sabe se você esperar mais um pouquinho ...

Dito de outra forma (e sem entrar em detalhes): é possível fazer uma lista infinita das provas por tablô de todas as fórmulas válidas do **CQC**, i.e., teríamos uma lista de provas

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$$

Assim, se α é válida, sua prova por tablôs é um dos P_i encontrados nesta lista, e um procedimento que for percorrendo a lista e conferindo se um certo elemento é uma prova de α ou não vai chegar, mais

cedo ou mais tarde, até a prova de α. Porém, uma lista infinita é muito grande: a prova de α pode ser o elemento de número três trilhões e um da lista. Resumindo, temos um *teste positivo* da validade de uma fórmula no **CQC**: verificar se a prova está na lista.

E o que acontece se uma fórmula não é válida? Claro, então não existe uma prova por tablôs dessa fórmula. Mas como saber isso, sem percorrer a lista toda? Sendo a lista infinita, nenhum procedimento jamais poderá terminar de percorrê-la e produzir a esperada resposta negativa.

A solução, se existisse uma, seria obter uma *lista das fórmulas que não têm prova por tablôs*, ou seja, um *teste negativo* para a validade no **CQC**. (Note que não é suficiente termos uma lista — que pode ser construída — dos tablôs terminados, para fórmulas do **CQC**, que são abertos. Mesmo tendo essa lista, vimos casos anteriormente de tablôs que *não terminam*. Ou seja, tais tablôs estão fora da lista dos tablôs fechados, e fora da lista dos tablôs abertos e terminados.)

Infelizmente, pode-se demonstrar que não há um teste negativo para a validade no **CQC**. É basicamente por isso que o **CQC** é indecidível: não há um tal teste negativo, e o teste positivo de validade consiste de uma lista interminável. (A propósito, se essa lista fosse finita — se houvesse um número finito de fórmulas válidas — o **CQC** seria decidível, já que qualquer fórmula inválida seria demonstrada como tal apenas ao se mostrar que não está na lista.)

Note agora a diferença do **CQC** em geral para o **CPC**, a lógica proposicional. No **CPC** temos procedimentos que são ao mesmo tempo um teste positivo e um teste negativo de validade: as tabelas de verdade, por exemplo, ou os tablôs sem quantificação. Com esses procedimentos conseguimos determinar sempre se uma fórmula é uma tautologia (uma fórmula válida do **CPC**) ou não.

Além do conjunto das tautologias, há outros subconjuntos interessantes do **CQC** que são decidíveis. Por exemplo, se só tivermos símbolos de propriedades, isto é, nenhum símbolo de relação, esse subconjunto do **CQC**, chamado de *cálculo de predicados monádico puro*, é decidível. Assim como este, há outros "pedaços" decidíveis do **CQC**. Mas esta seria uma história para um outro livro...

CAPÍTULO 13

SISTEMAS AXIOMÁTICOS E SISTEMAS FORMAIS

Este vai ser um capítulo um pouco mais "leve", em que vamos introduzir de modo simples algumas idéias que serão desenvolvidas com mais rigor a partir dos capítulos seguintes. Resumidamente, você vai tomar conhecimento de uma outra maneira de definir conseqüência lógica e de provar a validade de formas de argumento, que não envolve um recurso à semântica como vínhamos fazendo até agora. Essa maneira de fazer as coisas é baseada na noção de prova ou demonstração em um sistema formal.

13.1 Os matemáticos e a verdade

Suponhamos que, em uma dessas tardes chuvosas, em vez de estudar lógica você quisesse mostrar que uma barra de metal, quando aquecida, se dilata. Para isso você provavelmente iria medir o tamanho da barra enquanto ela estivesse fria, aquecê-la bastante, e depois medir de novo, não? (Tendo bastante espírito científico, você poderia até repetir o experimento uma meia dúzia de vezes, para garantir.) Assim, você mostraria a verdade da proposição em questão por meio do recurso à *observação* e *experimentação*.

De acordo com uma concepção mais ingênua de ciências empíricas, é assim que as coisas acontecem em ciências como a física e a química, por exemplo. (Na verdade, a situação é um pouco diferente:

você também pode mostrar que alguma proposição da física é verdadeira mostrando que ela é conseqüência lógica de outras proposições verdadeiras da física.)

O que acontece, contudo, no caso de uma das chamadas ciências formais, como a matemática? Por exemplo, suponhamos que alguém quisesse mostrar a verdade do Teorema de Pitágoras, ou seja, que num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Você acha que um geômetra iria sair mundo afora com uma fita métrica, tirando as medidas de todo triângulo retângulo encontrado pelo caminho? Certamente, não. Para começar, os triângulos físicos, tais como um triângulo desenhado num quadro-negro, são apenas aproximações de um verdadeiro triângulo. E supõe-se que o conhecimento da matemática seja rigoroso, e não impreciso. Além do mais, um geômetra, obviamente, não teria como examinar *todos* os triângulos. Assim, tem que haver algum outro jeito de mostrar a verdade de uma proposição matemática sem envolver um recurso à experimentação. Claro, os matemáticos usam observação, como no caso acima. Contudo, um matemático só vai mostrar-se convencido de que, por exemplo, o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos se houver uma *demonstração* disso.

Como vimos desde o começo deste livro, pode-se mostrar que alguma proposição é verdadeira por meio de algum argumento correto do qual ela seja a conclusão. É mais ou menos isso o que acontece na matemática: certas proposições são *provadas*, ou *demonstradas*, ao se mostrar que elas se seguem logicamente de algumas outras cuja verdade já foi estabelecida. Assim, uma demonstração de alguma proposição matemática consiste em mostrar que ela se segue logicamente de outras proposições matemáticas (supostamente) verdadeiras.

Naturalmente, se queremos alguma garantia de que aquilo que estamos provando é, de fato, verdadeiro, a questão se reduz a mostrar que as premissas dos argumentos usados na demonstração também são verdadeiras. Porém, as premissas de um argumento matemático serão obviamente outras tantas proposições matemáticas — e como garantir, então, a verdade *destas*? Demonstrações a partir de outras premissas mais?

Acho que você já está começando a perceber o problema. O que

pode acontecer, por um lado, é algum tipo de regresso ao infinito: mostra-se que uma proposição α é verdadeira com base em $\beta_1, \ldots, \beta_n$; cada β_i, com base em alguns outros $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; cada $\gamma_j\ldots$ Porém, até onde se vai? Essa regressão parece não ter fim. A menos que se caia em outro problema desagradável, que é um círculo vicioso; por exemplo: α porque β, β porque γ, e γ porque α.

Qualquer uma dessas alternativas é, de fato, inaceitável. Para conhecer uma tentativa de escapar desse dilema, vamos dar uma olhada na história da geometria.

13.2 Geometria

Não sei como foi no seu caso, mas, no meu tempo, no ginásio aprendia-se bastante geometria. Claro que você deve ter alguma idéia do que é a geometria, e daquilo de que ela se ocupa: você, certamente, sabe diferenciar um quadrado de um retângulo, e, com certeza, sabe achar o ponto médio de um segmento de reta usando apenas o compasso. (Não?)

Desde há muito tempo, a geometria é uma ciência, mas isso nem sempre foi assim. O nome 'geometria' significa algo como 'medida da terra', e é exatamente para isso que ela servia quando foi inventada no antigo Egito. Como você recorda das aulas de história, já dizia Heródoto que o Egito é uma dádiva do Nilo: o significado dessa afirmação tem a ver com o fato de que, anualmente, as cheias do Nilo inundavam as regiões vizinhas ao rio, mas com a boa conseqüência de fertilizá-las, de modo que se podia praticar a agricultura quando as águas baixavam. O único problema era que as inundações destruíam todas as marcações de terrenos e, para resolver os problemas decorrentes — isto é, as pendengas nos tribunais a respeito de quem era o dono de quais palmos de terra —, foi inventada a geometria, cujo emprego permitia a reconstituição de todas as delimitações depois que as águas baixavam. Resumindo, no Egito, a geometria surgiu praticamente como um conjunto de técnicas de agrimensura.

Mais tarde, quando a geometria chegou à Grécia, a partir do século VI a. C., havia um grupo de sábios interessados no conhecimento por si mesmo — conhecimento abstrato, não apenas em suas apli-

cações. Podemos dizer então que, nesse ambiente, a geometria passou a ser tratada como uma ciência, e não só como conjunto de técnicas. Nesse processo, através dos trabalhos de pessoas como Tales (que supostamente introduziu a geometria na Grécia) e Eudoxo etc., descobriu-se e mostrou-se muita coisa interessante — como o teorema de Pitágoras, de que falávamos acima. Assim, pouco a pouco, a geometria tornou-se uma coleção de teoremas — mas uma coleção ainda um tanto quanto desorganizada.

Entra em cena, então, Euclides (365?–275? a. C.), autor dos *Elementos*, para colocar um pouco de ordem nas coisas. A preocupação de Euclides era a mesma indicada no começo deste capítulo: como mostrar a verdade de uma proposição matemática (ou, no caso, geométrica)? Basicamente, pensou Euclides, a coisa deveria funcionar à base de demonstrações. Se eu tenho um conjunto de proposições verdadeiras, e estas acarretam uma outra, então esta outra é obviamente verdadeira. Mas como determinar a verdade das primeiras sentenças, sem cair num círculo vicioso, ou numa regressão ao infinito?

A idéia de Euclides foi a seguinte: algumas proposições geométricas são tão simples, mas tão simples, que realmente não se pode duvidar de sua verdade — ou seja, elas são *auto-evidentes* e não precisam ser demonstradas. Por exemplo, as proposições seguintes —

O todo é maior que cada uma das partes. (1)

Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si. (2)

— parecem ser realmente indubitáveis. Assim, se tomarmos um conjunto de tais proposições como ponto de partida, e mostrarmos que a partir delas podemos demonstrar todo o resto, teremos uma excelente garantia da verdade de proposições geométricas. (Fantástico, não?)

Uma situação parecida ocorre com os objetos de que trata a geometria, que, normalmente, são definidos ou construídos a partir de outros objetos disponíveis. Por exemplo, um triângulo pode ser definido como um polígono fechado de três lados — mas é claro que, para fazer isso, precisamos ter primeiro definido o que é um polígono, e o que são lados. Uma vez que você só pode definir um termo usando outros (ou construir um objeto a partir de outros já dados),

em algum momento você cai de novo em algum tipo de círculo, ou há o risco de uma regressão infinita.

Euclides saiu desse impasse de uma maneira análoga. Primeiro, ele escolheu um conjunto de termos cujo significado deveria estar intuitivamente claro, como 'comprimento', 'largura', 'parte'. A partir daí, apresentou definições de objetos como ponto e linha. Por exemplo, um ponto é aquilo que não tem partes, e uma linha é um comprimento sem largura.

Em segundo lugar, Euclides escolheu um grupo de proposições que não seria preciso demonstrar. Ele separou suas proposições não-demonstradas em dois grupos: os *axiomas*, mais gerais, que podem ser usados em qualquer ciência, e de que (1) e (2) acima são exemplos, e os *postulados*, especificamente geométricos, como por exemplo

> Dados dois pontos num plano, é possível traçar uma linha reta passando pelos dois.

De posse disso tudo, Euclides passou sistematicamente a demonstrar as proposições da geometria, incluindo o já citado teorema de Pitágoras, para mencionar uma delas. O resultado foi que, em seu livro intitulado *Os elementos*, ele organizou a geometria como um sistema — um *sistema axiomático* — em que proposições são demonstradas a partir de um pequeno número inicial de proposições aceitas sem prova. Note que essa idéia de Euclides foi realmente genial, tanto que os sistemas axiomáticos passaram, desde então, a ser o ideal de ciência.[1]

Para ser um pouco mais fiel à verdade histórica (já que andei tomando algumas liberdades nos parágrafos anteriores), Euclides teve precursores e, de mais a mais, ele cometeu um ou outro engano em suas demonstrações, fazendo, às vezes, uso de alguns princípios que não havia postulado explicitamente. Isso, contudo, foi corrigido mais tarde, de modo que sua idéia de derivar as proposições geométricas a partir de um conjunto de proposições indemonstráveis foi realizada.

---

[1]Mas não só na ciência. Pode-se talvez dizer que a obra de René Descartes, por exemplo, consiste em uma aplicação do método axiomático à filosofia. Você não se recorda de que Descartes andava à procura de alguma coisa *indubitável*, que resultou no famoso *cogito*? Confira também a *Ethica more geometrico demonstrata* de Spinoza — uma ética demonstrada à maneira dos geômetras.

Precisamos agora fazer um comentário sobre a "verdade evidente" dos axiomas geométricos. Talvez você tenha ouvido falar de geometrias não-euclidianas. São sistemas geométricos com alguns princípios que contradizem os de Euclides. Por exemplo, na geometria de Euclides, se tivermos alguma linha reta R e um ponto P fora dela, só é possível traçar uma única reta S passando por P que seja paralela a R. Por outro lado, na geometria desenvolvida por Bernhard Riemann (1826–1866), dada uma linha reta R e um ponto P fora dela, não é possível traçar nenhuma reta que seja paralela a R. Na geometria desenvolvida independentemente por János Bolyai (1802–1860) e Nikolai Lobachevski (1793–1856), podemos, ao contrário, traçar um número infinito de paralelas a R — todas distintas, claro. Bem, dado que existem então três sistemas geométricos diferentes, incompatíveis entre si, qual desses sistemas seria o correto?

A resposta é que, do ponto de vista formal, pode-se mostrar que todos os três são perfeitamente legítimos: nenhum deles envolve contradições — ou, melhor dizendo, se algum deles envolver uma contradição, a mesma coisa acontece com os outros. Isso teve como conseqüência que não se pode mais ter aquela certeza de que os axiomas são evidentemente verdadeiros. De fato, o entendimento contemporâneo do que são axiomas e postulados mudou: não são mais proposições verdadeiras auto-evidentes, que não é preciso demonstrar, mas simplesmente qualquer proposição aceita sem demonstração em um sistema. A questão da verdade de um conjunto de axiomas é uma outra história: haverá situações que serão modelo de um tal conjunto (ou seja, uma situação em que os axiomas desse conjunto serão verdadeiros), e outras em que não. (Se perguntarmos agora qual seria a geometria verdadeira no espaço físico, a resposta hoje em dia é que provavelmente não é a de Euclides. Mas isso já deixou de ser preocupação da matemática.)

13.3 Sistemas formais

Na época contemporânea, os sistemas axiomáticos passaram a ser apresentados como sistemas formais. A diferença entre uma coisa e outra está no uso de linguagens artificiais — como a linguagem

do **CQC** — ao invés de linguagens naturais. Enquanto as proposições num sistema axiomático tradicional são formuladas em, digamos, português, eventualmente acrescido de alguns símbolos, num sistema formal trabalhamos apenas com expressões bem-formadas de alguma linguagem artificial.

Um sistema formal *F* tem quatro componentes básicos:

(i) um *alfabeto*, que contém os caracteres da linguagem formal empregada em *F* (por exemplo, o alfabeto do **CQC**, se estivermos formulando o sistema em uma linguagem de primeira ordem);

(ii) um conjunto de *regras de formação*, que caracterizam quais são as expressões (seqüências de caracteres) da linguagem de *F* que são bem-formadas (por exemplo, a definição de fórmula no **CQC** nos dá um exemplo de um conjunto de regras de formação);

(iii) um conjunto de *axiomas*, isto é, um conjunto de expressões bem-formadas aceitas sem demonstração;

(iv) um conjunto de *regras de produção*, ou *regras de transformação*, que nos dizem como obter (produzir, derivar) novas expressões bem-formadas a partir dos axiomas e outras expressões já derivadas.

O último item acima mencionado, as regras de produção, é o que corresponde a regras lógicas de inferência em um sistema axiomático usual. Quer dizer, são os mecanismos que nos permitem obter proposições (fórmulas) novas a partir do que já se tem. Num sistema formal, portanto, podemos dizer que as regras lógicas ficam explicitamente codificadas.

É claro que isso tudo fica um pouco difícil de entender, apresentado assim abstratamente. Por isso, vamos fazer, na próxima seção, uma pausa para brincar um pouco com algo que pode ajudar a tornar as coisas mais claras. Voltaremos depois a falar dos sistemas formais, e no próximo capítulo começaremos a ver uma maneira de aplicar isso à lógica de primeira ordem.

13.4 Os *doublets* de Lewis Carroll

Para dar mais motivação intuitiva ao que virá depois, apresentarei um jogo inventado por Lewis Carroll (o autor de *Alice no país das maravilhas* e *Através do espelho*, caso você não se recorde). A brincadeira consiste em partir de uma palavra dada — GATO, por exemplo — e chegar até uma outra palavra dada como objetivo do jogo — digamos, PAIO. A regra é que podemos trocar apenas uma letra de cada vez na palavra disponível, de modo que o resultado dessa troca seja uma palavra do português.

É fácil ver como podemos partir de GATO e chegar a PAIO. Há um modo mais fácil, mas, por exemplo, podemos ter:

GATO
RATO
RAIO
PAIO

Esse é um exemplo bastante simples. Note que trocamos apenas uma letra, 'G' por 'R', para passar de GATO a RATO, e assim sucessivamente, até o objetivo final. Para a língua portuguesa, podemos adaptar um pouco a regra de trocar apenas uma letra, passando a desconsiderar os acentos. Assim, seria permitido passar de CÉU para SEU.

O jogo fica mais interessante se o par de palavras (a inicial e a final) estiverem de alguma forma relacionadas, e especialmente se tiverem algum tipo de oposição, como CÉU/MAR, SOL/LUA, DEUSA/DIABA, e assim por diante. Vamos ver como fica sol/lua?

SOL
SUL
SUA
LUA

Divertido, não? Os *doublets* até ficam parecendo poemas concretos. (Aliás, essa foi uma técnica usada pelo poeta Augusto de Campos, que inventou até mesmo '*triplets*', como MANHÃ/TARDE/NOITE.) Variantes desse jogo podem incluir regras mais permissivas, como, por exemplo, acrescentar uma letra (sem retirar nada) ou retirar

uma (sem acrescentar outra). Isso permitiria terminar em uma palavra com um número de letras diferente daquele da palavra inicial (como INVERNO/VERÃO, por exemplo).

Muito bem, mas o que tem isso tudo a ver com os nossos sistemas formais? Ora, a situação é bem parecida. Em ambos os casos, temos um ponto de partida: os *axiomas*, ou a *palavra inicial*. Depois, temos regras que permitem passar de certas fórmulas (ou palavras) para outras: *regras de produção* em um sistema formal, ou a *regra de trocar uma letra* no caso do jogo. Além disso, a noção de *prova* ou *derivação*: uma proposição é provada em um sistema axiomático se ela puder ser derivada a partir dos axiomas usando-se as regras da lógica; uma fórmula é derivada em um sistema formal se puder ser obtida por aplicações das regras de produção. Nos *doublets*, uma palavra é "derivada" de outra se conseguimos chegar até ela, partindo da palavra inicial, usando a regra do jogo. Assim, podemos dizer que MAR pode ser "provada", ou derivada, a partir de CÉU, e a construção toda pode ser chamada de uma "prova" de MAR a partir de CÉU.

Note que, nesse jogo, a única coisa a que se apela é à "sintaxe" do português: em momento algum se fala dos significados das palavras, ou algo assim — basta que se passe de uma palavra que está no dicionário para uma outra, não importa se passamos de RAIO para PAIO, que não tem nada um a ver com o outro.

Como você já deve estar suspeitando, vamos mostrar que existe uma outra maneira de caracterizar conseqüência lógica, uma maneira sintática, e iremos dizer que uma fórmula α é uma conseqüência lógica (sintática) de um conjunto Γ de fórmulas se α puder ser derivada de Γ usando-se certas regras de inferência (que veremos depois quais são). Observe que não falamos, nessa definição, em interpretações, ou estruturas, ou o que seja — por isso essa noção de conseqüência é sintática: podemos abstrair de significados e trabalhar apenas com as fórmulas, isto é, com cadeias de caracteres do alfabeto. É o que vamos começar a fazer no próximo capítulo.

Exercício 13.1 Mostre como chegar (se é que é possível!) de uma palavra a outra, nos seguintes pares (e outros que ocorrerem a você): CÉU/MAR, SAL/MEL, DEUSA/DIABA, CERTO/FALSO, PROFESSOR/ESTUDANTE.

CAPÍTULO 14

DEDUÇÃO NATURAL (I)

Em capítulos anteriores, você teve oportunidade de trabalhar com dois métodos para testar a validade de um argumento: o método das *tabelas de verdade*, que está limitado a argumentos proposicionais, e o dos *tablôs semânticos*. Neste capítulo vamos examinar uma outra maneira de mostrar a validade de argumentos, que, ao contrário das anteriores, não envolve um recurso à semântica: o método de *dedução natural*.

14.1 Apresentando a dedução natural

Você se lembra de que o uso de tablôs semânticos representou uma razoável melhoria, no que concerne à eficiência, em relação às tabelas de verdade. Você pôde demonstrar a validade (ou invalidade) de um argumento de maneira usualmente mais rápida. (Além, claro, do fato de que tablôs semânticos podem ser usados em geral no **CQC**, ao contrário das tabelas de verdade.) Contudo, mesmo com tablôs, havia ainda muitos casos em que a determinação da validade de um argumento envolvia um número muito grande de passos. Consideremos o seguinte exemplo:

$$Pa \rightarrow (Qab \wedge Cq),\ (Qab \wedge Cq) \rightarrow Dc,\ Dc \rightarrow (E \vee (\neg E \rightarrow Fba)),\ Pa,\ \neg E \vDash Fba.$$

Uma vez que ocorrem seis fórmulas atômicas diferentes na forma de argumento acima, uma tabela de verdade para ela teria 64 linhas. Um tablô seria, certamente, muito mais simples, mas envolveria ainda seis aplicações das regras de construção e outros tantos testes à procura de contradições. O método que vamos começar a examinar agora, o da *prova de validade utilizando dedução natural*, permitirá a você mostrar a validade dessa forma de argumento de uma maneira mais compacta. Basicamente, o procedimento consiste em aplicar um conjunto de *regras de inferência* ao conjunto de premissas, gerando conclusões intermediárias às quais aplicam-se novamente as regras, até atingir-se a conclusão final desejada. A esse processo chamamos *deduzir*, *derivar* ou *provar* a conclusão a partir do conjunto das premissas, e a seu resultado, obviamente, uma *dedução* ou *derivação* ou *prova*. Nas seções seguintes, e também continuando no próximo capítulo, você verá quais regras de inferência vamos ter à nossa disposição. Primeiramente, vamos examinar como aplicar a dedução natural ao exemplo acima.

Uma dedução é construída da seguinte maneira: primeiro, fazemos uma lista das premissas que estão a nosso dispor, colocando uma em cada linha, e escrevendo 'P' ao lado, para indicar que se trata de uma premissa. Cada linha em uma derivação é numerada, e deve-se ter uma "justificativa" para a fórmula que nela se encontra. Assim:

1.	$Pa \to (Qab \wedge Cq)$	P	
2.	$(Qab \wedge Cq) \to Dc$	P	
3.	$Dc \to (E \vee (\neg E \to Fba))$	P	
4.	Pa	P	
5.	$\neg E$	P	$?Fba$

Note que, na linha 5, depois da justificativa 'P', eu escrevi '$?Fba$'. Isso não faz propriamente parte da dedução (você pode deixar isto de lado, se quiser), mas está aí como um lembrete de qual fórmula é que estamos pretendendo deduzir — o objetivo a ser atingido, por assim dizer.

Como proceder agora? Bem, a idéia é empregar alguma *regra de inferência* que nos permita acrescentar uma nova linha a essa derivação, contendo uma fórmula que é o resultado da aplicação da regra

a fórmulas anteriores. Mas quais seriam as regras de inferência, e de onde vêm elas?

A resposta a isso é simples: as regras básicas de inferência são *postuladas*, isto é, aceitas sem demonstração. Antes que você reclame que isso parece escandaloso, note que, obviamente, não há como demonstrá-las: para tanto, teríamos que empregar *outras* regras — as quais deveríamos ter aceito anteriormente. Em certo sentido, e abusando um pouco da linguagem, você pode dizer que as regras básicas são *axiomas*, embora a palavra 'axioma', como vimos, seja normalmente reservada para proposições primitivas, e não regras de inferência. Usando a nomenclatura usual de maneira correta, temos de dizer que, na verdade, o método de dedução natural é um sistema formal que não tem axiomas (isto é, fórmulas não-demonstradas), mas tão-somente regras de inferência. (A questão do "ponto de partida", que preocupava Euclides, será resolvida de outro modo, como veremos depois.)

Agora, se as regras de inferência são simplesmente postuladas, nada nos impediria, em princípio, de postular uma regra qualquer. Por exemplo, a regra

SE	você tem $\alpha \to \beta$ em uma linha
E	você tem β em outra linha,
ENTÃO	acrescente α em uma nova linha

seria perfeitamente admissível, de um ponto de vista puramente formal. Mas seria uma regra muito desagradável! Ela nada mais é do que a codificação de uma forma inválida de argumento, a famosa (ou infame) Falácia de Afirmação do Conseqüente. Usando um pequeno exemplo, é fácil ver que tal regra é inválida (recorde-se de que Lulu é o cachorro do vizinho):

P_1 Se Lulu é um gato, então é um animal.
P_2 Lulu é um animal.
▶ Lulu é um gato.

O argumento acima, uma instância da falácia em questão, é claramente inválido. Acrescentar, então, a Falácia de Afirmação do Conseqüente como regra de inferência implica não ter mais garantia nenhuma de que uma conclusão será verdadeira se as premissas o

forem. Para enfatizar isso: nada nos impede de aceitar *qualquer coisa* como uma regra de inferência. O sistema resultante, contudo, poderá não ter interesse nenhum, não passando de um jogo de símbolos. Assim, para que o método de dedução natural tenha utilidade, algum critério sensato deve ser observado na escolha das regras de inferência. Ou seja, que elas devam *preservar a verdade*: se as fórmulas às quais a regra se aplica são verdadeiras, a fórmula resultante também o será. (Como você vê, mesmo um método sintático como esse, para ter utilidade, deve ter algum tipo de interpretação.)

Voltando à escolha das regras, se você ainda se lembra da lista das tautologias mais conhecidas, no capítulo 9, você decerto há de recordar uma em especial, que tem o nome de *modus ponens*:

$$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$$

O *modus ponens* garante que, toda vez que tivermos (como verdadeiros) uma fórmula α e um condicional $\alpha \rightarrow \beta$ quaisquer, teremos também (como verdadeiro) o conseqüente desse condicional, β. Se você olhar com um pouco de atenção para o conjunto de premissas no argumento acima, verá que é exatamente isso o que temos: na linha 1 temos a fórmula $Pa \rightarrow (Qab \wedge Cq)$, e, na linha 4, Pa. Supondo, como estamos, que essas fórmulas sejam verdadeiras, a regra de *modus ponens* nos autoriza a concluir $Qab \wedge Cq$. Como se vê abaixo:

1. $Pa \rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P	
2. $(Qab \wedge Cq) \rightarrow Dc$	P	
3. $Dc \rightarrow (E \vee (\neg E \rightarrow Fba))$	P	
4. Pa	P	
5. $\neg E$	P	?Fba
6. $Qab \wedge Cq$	1,4 MP	

Acrescentamos, assim, uma nova linha ao que já tínhamos, de número 6, na qual anotamos a primeira conclusão provisória que temos (i.e., $Qab \wedge Cq$), de onde ela veio (linhas 1 e 4) e a regra de inferência usada para chegar até ela (MP). Está claro?

Bem, você poderia dizer, se o que queremos realmente concluir é Fba, por que ficar concluindo primeiro $Qab \wedge Cq$? Simples. Como alguém já disse, uma caminhada de um quilômetro começa com

um passo: é o que estamos fazendo aqui (embora a dedução não se vá alongar por um quilômetro). Isto é, ainda não derivamos *Fba* — mas agora estamos muito mais perto disso do que dois parágrafos atrás!

Vamos continuar. Na linha 2, temos outra vez uma fórmula da forma $\alpha \rightarrow \beta$, em que α corresponde a $Qab \wedge Cq$. E o que temos na linha 6 recém-derivada? Nada menos que a própria α. Isso nos enseja a usar outra vez MP, obtendo Dc como resultado, que, por sua vez, é o antecedente de mais um condicional, $Dc \rightarrow (E \vee (\neg E \rightarrow Fba))$, encontrado na linha 3. Uma terceira aplicação de MP nos deixa na seguinte situação:

1.	$Pa \rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P	
2.	$(Qab \wedge Cq) \rightarrow Dc$	P	
3.	$Dc \rightarrow (E \vee (\neg E \rightarrow Fba))$	P	
4.	Pa	P	
5.	$\neg E$	P	?*Fba*
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP	
7.	Dc	2,6 MP	
8.	$E \vee (\neg E \rightarrow Fba)$	3,7 MP	

A regra MP não pode agora nos levar mais longe, pois já derivamos por meio dela tudo o que era possível — ao menos por enquanto. Felizmente, existem outras regras de inferência de que podemos lançar mão. Você se recorda ainda de uma tautologia chamada *silogismo disjuntivo*?

$$(\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \rightarrow \beta$$

É justamente o que vamos utilizar agora nas linhas 5 e 8 (usando 'SD' para indicar a nova regra utilizada). O resultado é:

1.	$Pa \rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P	
2.	$(Qab \wedge Cq) \rightarrow Dc$	P	
3.	$Dc \rightarrow (E \vee (\neg E \rightarrow Fba))$	P	
4.	Pa	P	
5.	$\neg E$	P	?*Fba*
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP	
7.	Dc	2,6 MP	

8.	$E \vee (\neg E \rightarrow Fba)$	3,7 MP
9.	$\neg E \rightarrow Fba$	5,8 SD

E agora? Simples: mais uma vez temos um condicional, e, numa outra linha, seu antecedente. Logo: *modus ponens*. Mas você vai protestar: o antecedente é a linha 5, que acabamos de utilizar! Não há problema; na lógica clássica, isso é perfeitamente aceitável, ou seja, as fórmulas podem ser usadas e reutilizadas tantas vezes quanto necessário ou desejado.[1] Assim, usando $\neg E$ mais uma vez, temos:

1.	$Pa \rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P	
2.	$(Qab \wedge Cq) \rightarrow Dc$	P	
3.	$Dc \rightarrow (E \vee (\neg E \rightarrow Fba))$	P	
4.	Pa	P	
5.	$\neg E$	P	$?Fba$
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP	
7.	Dc	2,6 MP	
8.	$E \vee (\neg E \rightarrow Fba)$	3,7 MP	
9.	$\neg E \rightarrow Fba$	5,8 SD	
10.	Fba	5,9 MP	

E aí está, acabada, nossa dedução. De uma maneira mais compacta do que por meio do uso de uma tabela de verdade, e, nesse caso, mesmo do que pelo uso de um tablô, mostramos que *Fba* é, de fato, uma conseqüência lógica do conjunto de premissas dado. Como você viu, o processo todo consistiu numa manipulação de símbolos, gerando novas fórmulas a partir das fórmulas disponíveis. Podemos encarar isso como um processo de *transformar* algumas fórmulas em outras — por isso as regras de inferência são também freqüentemente chamadas *regras de transformação*.

14.2 Regras de inferência diretas

No exemplo anterior, utilizamos apenas duas regras de inferência, o que é muito limitado e insuficiente para demonstrar a validade

[1] Há alguns tipos de lógica, por exemplo, a chamada *lógica linear*, em que cada premissa pode ser utilizada apenas uma vez. Mas essa é uma outra história.

de todos os argumentos que podem ser codificados no CQC. Assim, precisamos lançar mão de (ou seja, postular) mais algumas regras básicas. Em princípio, não há limite quanto ao número de regras que se pode ter num sistema. Há naturalmente um mínimo necessário — o conjunto de regras deve ser *completo*, isto é, idealmente elas devem ser capazes de mostrar a validade de todas as formas de argumento —, mas podemos perfeitamente introduzir regras que seriam "supérfluas", de modo a facilitar o processo de derivação (o que veremos numa etapa posterior).

Mas como determinar o mínimo necessário? Bem, uma sugestão razoável é ter, para cada operador, duas regras: uma que *introduza* o operador (ou seja, cujo resultado seja uma fórmula cujo símbolo principal é aquele operador), e uma que *elimine* o operador (ou seja, que, tomando como entrada uma fórmula cujo símbolo principal seja o operador, dê como resultado uma fórmula mais simples, de onde o operador tenha sido eliminado). De modo similar, para os quantificadores.

Nesta primeira seção, vamos nos restringir a regras de inferência que nos permitam fazer derivações diretas. As seções seguintes tratarão de outros procedimentos de derivação um pouco mais sofisticados. No próximo capítulo, vamos considerar o caso dos quantificadores.

As regras de inferência que vamos utilizar são aquelas apresentadas na figura 14.1. Como você pode notar, para cada regra existem uma ou mais fórmulas, acima de um traço horizontal, e uma que aparece abaixo do traço. A fórmula abaixo do traço é chamada *conclusão* da regra, e as outras, as *premissas*. Algumas regras, como MP, necessitam de duas premissas (α e $\alpha \rightarrow \beta$), enquanto outras, como DN, têm apenas uma premissa ($\neg\neg\alpha$). Note ainda que algumas regras têm duas versões, como a regra de separação: dada uma conjunção $\alpha \wedge \beta$, você pode tanto concluir α, como β. De forma semelhante, para SD e BC. O traço horizontal, claro, significa que a fórmula que ocorre na parte de baixo pode ser derivada, por meio da regra correspondente, a partir da(s) fórmula(s) que ocorre(m) na parte de cima.

Tendo assim um conjunto inicial de regras de inferência, podemos definir quando uma fórmula é uma conseqüência lógica de um conjunto de outras.

Dupla Negação (DN):

$$\begin{array}{c} \neg\neg\alpha \\ \hline \alpha \end{array}$$

Conjunção (C):

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \hline \alpha \wedge \beta \end{array}$$

Expansão (E):

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha \vee \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \beta \vee \alpha \end{array}$$

Condicionais para Bicondicional (CB):

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \beta \to \alpha \\ \hline \alpha \leftrightarrow \beta \end{array}$$

Modus Ponens (MP):

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

Separação (S):

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ \hline \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ \hline \beta \end{array}$$

Silogismo Disjuntivo (SD):

$$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \\ \hline \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\beta \\ \hline \alpha \end{array}$$

Bicondicional para Condicionais (BC):

$$\begin{array}{c} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \hline \alpha \to \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \hline \beta \to \alpha \end{array}$$

FIGURA 14.1 — Regras de inferência diretas.

Definição 14.1 *Sejam* Γ *um conjunto qualquer de fórmulas e* α *uma fórmula. Uma dedução de* α *a partir de* Γ *é uma seqüência finita* $\delta_1, \ldots, \delta_n$ *de fórmulas, tal que* $\delta_n = \alpha$ *e cada* δ_i, $1 \leq i \leq n$, *é uma fórmula que pertence a* Γ *ou foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes na seqüência, por meio da aplicação de alguma regra de inferência.*

Esclarecendo: temos uma dedução de uma fórmula α a partir de algum conjunto Γ se há, primeiro, uma seqüência $\delta_1, \ldots, \delta_n$ de fórmulas — portanto, uma seqüência de comprimento finito —, tal como a seqüência 1–10 no exemplo dado na seção anterior. Segundo, o último elemento da seqüência, δ_n, é a própria α. (No exemplo anterior, *Fba*.) Terceiro, cada uma das fórmulas nessa seqüência — cada δ_i, $1 \leq i \leq n$ — tem que ter uma boa razão para estar nela. Assim, ou δ_i é uma das fórmulas de Γ — ou seja, uma premissa, como as fórmulas nas linhas 1–5 no exemplo dado — ou foi obtida de fórmula(s) que

aparecia(m) antes, por meio da aplicação de uma regra de inferência. É o que acontece com as linhas 6–10 do exemplo anterior. A fórmula da linha 6, como vimos, foi obtida a partir das fórmulas nas linhas 1 e 4 por MP.

Tendo, então, precisado melhor o que é uma dedução, podemos definir agora conseqüência lógica do ponto de vista do método de dedução natural:

Definição 14.2 *Sejam* Γ *um conjunto qualquer de fórmulas e* α *uma fórmula. Dizemos que* α *é conseqüência lógica (sintática) de* Γ, *o que denotamos por* '$\Gamma \vdash \alpha$', *se há uma dedução de* α *a partir de* Γ.

Voltando ao exemplo inicial deste capítulo, podemos afirmar que

$$\{Pa \to (Qab \wedge Cq), (Qab \wedge Cq) \to Dc, \\ Dc \to (E \vee (\neg E \to Fba)), Pa, \neg E\} \vdash Fba$$

Como você notou, usamos o símbolo especial '$\vdash$' para denotar conseqüência *sintática*, assim como vínhamos usando '$\vDash$' para denotar conseqüência *semântica*. As chaves englobando a lista de fórmulas à esquerda de '$\vdash$' indicam que temos um conjunto — mas as chaves podem ser dispensadas, para abreviar, quando não houver risco de confusão. Assim, em vez de escrevermos, digamos

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta,$$

podemos escrever simplesmente

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta.$$

Do mesmo modo, escrevemos, abreviadamente, '$\alpha \vdash \beta$' quando alguma fórmula β é uma conseqüência de α — em vez de escrever '$\{\alpha\} \vdash \beta$'.

Exercício 14.1 Em cada um dos casos indicados abaixo, diga qual foi a regra utilizada para deduzir a conclusão das premissas.

(a) $Pa \wedge Qb \vdash Qb$

(b) $Rab \to Pc, Rab \vdash Pc$

(c) $Qa \vdash Qa \vee \neg Pb$

(d) $Qa, Rab \vdash Rab \wedge Qa$
(e) $\neg Qa, Rab \vee Qa \vdash Rab$
(f) $Pa \rightarrow Pb, Pb \rightarrow Pa \vdash Pa \leftrightarrow Pb$
(g) $\neg\neg(Rac \vee Qb) \vdash Rac \vee Qb$
(h) $Sabc \leftrightarrow Tp \vdash Tp \rightarrow Sabc$
(i) $Pa \wedge (Qb \vee Rab) \vdash Qb \vee Rab$
(j) $\neg Pa, Pa \rightarrow Qb \vdash (Pa \rightarrow Qb) \wedge \neg Pa$
(k) $(Qb \vee Rab) \rightarrow (\neg A \wedge C), Qb \vee Rab \vdash \neg A \wedge C$
(l) $\neg\neg(A \rightarrow (Qb \vee C)) \vdash A \rightarrow (Qb \vee C)$
(m) $(Pa \wedge Tc) \leftrightarrow \neg(Rab \rightarrow C) \vdash (Pa \wedge Tc) \rightarrow \neg(Rab \rightarrow C)$
(n) $Pa \rightarrow Qb \vdash (A \leftrightarrow B) \vee (Pa \rightarrow Qb)$
(o) $(Pa \rightarrow Tp) \wedge (A \vee \neg\neg Rab) \vdash A \vee \neg\neg Rab$
(p) $\neg Pa \rightarrow (Qb \vee Tc), (Qb \vee Tc) \rightarrow \neg Pa \vdash (Qb \vee Tc) \leftrightarrow \neg Pa$

14.3 Fazendo uma dedução

Antes de passarmos a mais exercícios, nos quais você deverá fazer uma série de deduções, vamos ver mais alguns exemplos. Suponha que queiramos mostrar o seguinte:

$$\neg\neg Ap,\ Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb),\ Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc,\ Gc \vee \neg Ap \vdash Fa \wedge Fb.$$

O passo inicial, claro, é listar as premissas, e indicar a conclusão desejada. Assim:

1.	$\neg\neg Ap$	P	
2.	$Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb)$	P	
3.	$Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc$	P	
4.	$Gc \vee \neg Ap$	P	$?Fa \wedge Fb$

E agora, como proceder? Bem, uma sugestão razoável é verificar onde, nas premissas, ocorre a fórmula que desejamos deduzir, i.e., $Fa \wedge Fb$. Vemos imediatamente que ela aparece na linha 2, sendo uma subfórmula do seguinte condicional:

$$Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb).$$

A questão é: como vamos tirar $Fa \wedge Fb$ dali? Bem, como a fórmula acima é um condicional, e $Fa \wedge Fb$ é seu conseqüente, só precisamos,

para poder usar a regra MP, obter seu antecedente, *Sabc*. Assim, nosso objetivo, na dedução em curso, agora é encontrar *Sabc*. E onde está essa fórmula?

Vamos encontrá-la na linha 3, uma subfórmula de $Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc$. De fato, ela aparece precedida de dois sinais de negação: $\neg\neg Sabc$. Mas isso não é problema, pois temos a regra DN que nos permite eliminar uma negação dupla. Ou seja, se conseguirmos obter $\neg\neg Sabc$ isoladamente, nosso problema está resolvido. No entanto, como vamos fazer isso? Ao contrário do caso anterior, não temos um condicional, onde poderíamos usar MP se tivéssemos seu antecedente, mas um bicondicional.

Mas... um momento: não existe uma regra que nos permite obter um condicional a partir de um bicondicional? Claro, a regra BC. Vamos aplicá-la imediatamente. Nossa dedução fica, após essa primeira aplicação de uma regra, assim:

1.	$\neg\neg Ap$	P	
2.	$Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb)$	P	
3.	$Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc$	P	
4.	$Gc \vee \neg Ap$	P	$?Fa \wedge Fb$
5.	$Gc \rightarrow \neg\neg Sabc$	3 BC	

Agora sim, temos um condicional, e só precisamos obter seu antecedente, que é *Gc*. E onde encontramos *Gc*?

É claro, *Gc* aparece na fórmula da linha 3, mas este é o bicondicional a partir do qual obtivemos a linha 5. A fórmula *Gc* aparece também na linha 5 — mas este é o condicional em que vamos aplicar MP, se tivermos *Gc*. Assim, temos que procurar em outro lugar. E a resposta é óbvia: *Gc* aparece na linha 4, na fórmula $Gc \vee \neg Ap$. E mais uma vez a pergunta é: como vamos tirá-la daí?

Bem, a fórmula que temos é uma disjunção. Pela regra do silogismo disjuntivo, se tivermos a negação do outro elemento da disjunção, $\neg Ap$, poderemos derivar *Gc*. A negação de $\neg Ap$ é, muito obviamente, $\neg\neg Ap$. E onde se encontra essa fórmula?

Desta vez tivemos sorte: ela está sozinha na linha 1, pronta para ser usada! Vamos fazer isso imediatamente, antes que ela fuja. Nossa dedução fica, portanto, assim:

1. $\neg\neg Ap$	P	
2. $Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb)$	P	
3. $Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc$	P	
4. $Gc \vee \neg Ap$	P	$?Fa \wedge Fb$
5. $Gc \rightarrow \neg\neg Sabc$	3 BC	
6. Gc	1,4 SD	

Tendo obtido Gc, podemos aplicar MP usando as linhas 5 e 6, ficando com a seguinte situação:

1. $\neg\neg Ap$	P	
2. $Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb)$	P	
3. $Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc$	P	
4. $Gc \vee \neg Ap$	P	$?Fa \wedge Fb$
5. $Gc \rightarrow \neg\neg Sabc$	3 BC	
6. Gc	1,4 SD	
7. $\neg\neg Sabc$	5,6 MP	

Podemos agora terminar nossa dedução. Primeiro, aplicamos DN à fórmula da linha 7, obtendo *Sabc*, que é o antecedente, que estávamos procurando, do condicional da linha 2. Finalmente, uma aplicação de MP nos dá $Fa \wedge Fb$, que é a fórmula que queríamos originalmente deduzir. A dedução, terminada, fica assim:

1. $\neg\neg Ap$	P	
2. $Sabc \rightarrow (Fa \wedge Fb)$	P	
3. $Gc \leftrightarrow \neg\neg Sabc$	P	
4. $Gc \vee \neg Ap$	P	$?Fa \wedge Fb$
5. $Gc \rightarrow \neg\neg Sabc$	3 BC	
6. Gc	1,4 SD	
7. $\neg\neg Sabc$	5,6 MP	
8. $Sabc$	7 DN	
9. $Fa \wedge Fb$	2,8 MP	

Vamos a mais um exemplo, antes dos exercícios. Suponha agora que queiramos mostrar que

$$Pa \rightarrow Qb,\ Pa \wedge \neg Rab,\ Rab \vee (Qb \rightarrow Pa) \vdash (Pa \leftrightarrow Qb) \wedge (Qb \vee C),$$

isto é, que $(Pa \leftrightarrow Qb) \wedge (Qb \vee C)$ é conseqüência do conjunto de fórmulas à esquerda de '$\vdash$'. O primeiro passo, mais uma vez, é listar as premissas:

1.	$Pa \rightarrow Qb$	P	
2.	$Pa \wedge \neg Rab$	P	
3.	$Rab \vee (Qb \rightarrow Pa)$	P	$?(Pa \leftrightarrow Qb) \wedge (Qb \vee C)$

Bem, a fórmula que desejamos deduzir é uma conjunção. No entanto, ao contrário do exemplo anterior, onde $Fa \wedge Fb$ aparecia inteira, como conseqüente de um condicional, $(Pa \leftrightarrow Qb) \wedge (Qb \vee C)$ não aparece em lugar nenhum. Porém, você sabe que, pela regra de conjunção (C), se tivermos os dois pedaços de uma conjunção em linhas diferentes, podemos juntá-los numa fórmula só. Assim, o que precisamos fazer é, primeiro, encontrar $Pa \leftrightarrow Qb$, e depois $Qb \vee C$, certo? Note agora que $Pa \leftrightarrow Qb$ é um bicondicional: para obtê-lo, vamos primeiro precisar encontrar os dois condicionais correspondentes, e juntá-los pela regra CB. Um dos condicionais, $Pa \rightarrow Qb$, está na linha 1 como premissa, ou seja, já o temos; o outro, $Qb \rightarrow Pa$, ocorre na linha 3, mas como elemento da disjunção $Rab \vee (Qb \rightarrow Pa)$. Como tirá-lo daí? Simples: se encontrarmos $\neg Rab$ em algum lugar, podemos usar SD. E $\neg Rab$, de fato, ocorre na linha 2, como elemento de uma conjunção. Agora, a regra de separação (S) nos permite obter imediatamente qualquer elemento de conjunção; assim, metade do nosso problema está resolvida. Vamos escrever tudo isso:

1.	$Pa \rightarrow Qb$	P	
2.	$Pa \wedge \neg Rab$	P	
3.	$Rab \vee (Qb \rightarrow Pa)$	P	$?(Pa \leftrightarrow Qb) \wedge (Qb \vee C)$
4.	$\neg Rab$	2 S	
5.	$Qb \rightarrow Pa$	3,4 SD	
6.	$Pa \leftrightarrow Qb$	1,5 CB	

Certo? Tendo agora $Pa \leftrightarrow Qb$, só precisamos de $Qb \vee C$. Contudo, essa fórmula não aparece em lugar algum. Note que nem C ocorre entre as premissas. Que fazer?

A solução é óbvia. Como estamos atrás de uma disjunção, se tivermos um de seus elementos — Qb, por exemplo — podemos obter

a disjunção inteira por meio da regra de expansão. Portanto, basta-nos encontrar *Qb*. Bem, *Qb* está na linha 1 como conseqüente de condicional — se tivermos *Pa*, o antecedente, poderíamos usar MP. Mas praticamente temos *Pa*, que ocorre como elemento de uma conjunção na linha 2. Basta separá-lo, e está pelada a coruja, como se diz um pouco mais ao sul. Assim, problema resolvido:

1.	$Pa \to Qb$	P	
2.	$Pa \land \neg Rab$	P	
3.	$Rab \lor (Qb \to Pa)$	P	?$(Pa \leftrightarrow Qb) \land (Qb \lor C)$
4.	$\neg Rab$	2 S	
5.	$Qb \to Pa$	3,4 SD	
6.	$Pa \leftrightarrow Qb$	1,5 CB	
7.	Pa	2 S	
8.	Qb	1,7 MP	
9.	$Qb \lor C$	8 E	
10.	$(Pa \leftrightarrow Qb) \land (Qb \lor C)$	6,9 C	

Os exemplos acima nos deram algumas dicas de como proceder ao fazer uma dedução. Se a fórmula que procuramos aparece em algum lugar — como o conseqüente de um condicional, ou um elemento de uma disjunção, por exemplo —, o que temos a fazer é obter o antecedente daquele condicional, ou a negação do outro elemento da disjunção, e deduzir imediatamente a fórmula desejada. No entanto, se a fórmula que procuramos não aparece como subfórmula de nenhuma das premissas, há outras coisas que podemos tentar. Algumas sugestões você encontra a seguir (mais tarde veremos outras):

Conjunção: Para derivar uma conjunção, procure derivar cada elemento individualmente; depois, junte-os usando a regra de conjunção (C).

Bicondicional: Derive primeiro os condicionais correspondentes, e depois aplique CB.

Disjunção: Ver se é possível derivar um ou outro disjuntivo, e depois usar expansão (E).

E agora, após isso tudo, uma pausa com alguns exercícios.

Exercício 14.2 Abaixo você encontra uma série de deduções já feitas. (Para simplificar, vamos usar nestes primeiros apenas letras sentenciais.) Dê a justificativa para cada linha que falta.

(a)

1.	$(A \vee B) \rightarrow C$	P
2.	$C \wedge A$	P
3.	A	
4.	$A \vee B$	
5.	C	
6.	$A \wedge C$	
7.	$(A \vee B) \wedge (A \wedge C)$	

(b)

1.	$A \rightarrow B$	P
2.	$C \vee (B \rightarrow A)$	P
3.	$D \rightarrow \neg C$	P
4.	$E \wedge D$	P
5.	D	
6.	$\neg C$	
7.	$B \rightarrow A$	
8.	$A \leftrightarrow B$	

(c)

1.	$\neg\neg A \wedge (B \rightarrow C)$	P
2.	$E \wedge D$	P
3.	$((B \rightarrow C) \wedge (D \vee F)) \rightarrow G$	P
4.	$B \rightarrow C$	
5.	D	
6.	$D \vee F$	
7.	$(B \rightarrow C) \wedge (D \vee F)$	
8.	G	
9.	E	
10.	$\neg\neg A$	
11.	A	
12.	$G \wedge A$	
13.	$(G \wedge A) \wedge E$	

(d)

1.	$B \leftrightarrow A$	P
2.	$(B \vee C) \rightarrow (E \vee Q)$	P
3.	$(B \wedge A) \rightarrow C$	P
4.	$\neg E$	P
5.	B	P
6.	$B \rightarrow A$	
7.	A	
8.	$B \wedge A$	
9.	C	
10.	$B \vee C$	
11.	$E \vee Q$	
12.	Q	

(e)

1.	$(\neg B \rightarrow \neg A) \leftrightarrow (C \vee D)$	P
2.	D	P
3.	$\neg B$	P
4.	$A \vee (T \vee \neg\neg Q)$	P
5.	$(C \vee D) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	
6.	$C \vee D$	
7.	$\neg B \rightarrow \neg A$	
8.	$\neg A$	
9.	$T \vee \neg\neg Q$	
10.	$(T \vee \neg\neg Q) \vee R$	

(f)

1.	$\neg(P \wedge B) \rightarrow \neg T$	P
2.	$T \vee (\neg\neg A \wedge \neg C)$	P
3.	$A \rightarrow \neg E$	P
4.	$\neg(P \wedge B)$	P
5.	$\neg T$	
6.	$\neg\neg A \wedge \neg C$	
7.	$\neg\neg A$	
8.	A	
9.	$\neg E$	
10.	$(A \rightarrow \neg E) \wedge \neg E$	

Exercício 14.3 Prove a validade das formas de argumento seguintes, utilizando dedução natural:

(a) $Pa \vee Pb, \neg Pa \vdash Pb$
(b) $Pa, Pb \vdash Pb \wedge Pa$
(c) $Pa \rightarrow Pb, Pa \vdash Pa \wedge Pb$
(d) $Pa \leftrightarrow Pb, Pa \vdash Pb$
(e) $Qa \wedge Qc \vdash Qa \vee B$
(f) $Rab \vee \neg Pa, \neg\neg Pa \vdash Rab$
(g) $Pa \wedge Pb \vdash Pb \wedge Pa$
(h) $(Pa \rightarrow Rab) \wedge (Pa \rightarrow Fb), Pa \vdash Rab \wedge Fb$
(i) $(Rab \vee C) \rightarrow \neg\neg Pa, C \vdash Pa$
(j) $(Pa \vee Qb) \wedge C, \neg Qb \vdash Pa$
(k) $(\neg A \rightarrow Pb) \wedge (Pb \rightarrow \neg A) \vdash \neg A \leftrightarrow Pb$
(l) $\neg Pa \vee (Qb \vee Rab), \neg\neg Pa \wedge \neg Qb, Rab \rightarrow D \vdash D$
(m) $A \leftrightarrow Qb, Fa \leftrightarrow Rab, A \wedge Rab \vdash Fa \wedge Qb$
(n) $Pa \rightarrow (Apq \leftrightarrow Bcd), Cs \vee D, D \rightarrow \neg\neg Pa, \neg Cs \wedge Bcd \vdash Apq$

14.4 Regras de inferência hipotéticas

Como você pôde ver, o conjunto de regras de inferência que utilizamos até agora nos permite demonstrar a validade de um grande número de argumentos. Contudo, esse conjunto de regras tem ainda um pequeno defeito: ele não é *completo*, ou seja, existem formas de argumento que são válidas no **CQC**, mas cuja validade não pode ser demonstrada apenas com essas regras. Em primeiro e óbvio lugar, ainda faltam as regras para os quantificadores. Em segundo lugar, você notou que temos apenas oito regras — quando deveríamos ter ao menos dez, ou seja, duas para cada operador. Esta seção vai tratar das regras para operadores que ainda faltam. Elas se diferenciam das regras diretas da seção anterior, porque exigem o uso de *hipóteses*.

Vamos começar com um exemplo.

> Se Miau é um gato típico, ele não gosta de nadar. Se não gosta de nadar, então não pratica pesca submarina. Logo, se Miau é um gato típico, Miau não pratica pesca submarina.

Usando *G*, *N* e *P* para simbolizar, respectivamente, '*x* é um gato

típico', 'x gosta de nadar', e 'x pratica pesca submarina', e usando m para representar Miau, teríamos o seguinte:

$$Gm \to \neg Nm, \neg Nm \to \neg Pm \vdash Gm \to \neg Pm.$$

É fácil demonstrar, usando um tablô, ou mesmo uma tabela de verdade (pois não temos quantificadores), que o argumento acima é válido. Contudo, não há nenhuma maneira, usando as regras de inferência da seção anterior, de mostrar que $Gm \to \neg Pm$ é uma conseqüência das premissas dadas. (Tente!) Assim, precisamos de algumas regras adicionais.

Vamos por partes. Note que a conclusão do argumento acima é um condicional — como você faria para demonstrar a verdade de uma proposição condicional?

Uma estratégia usual é a seguinte: suponhamos — apenas uma hipótese — que o *antecedente* do condicional seja verdadeiro. Isto é, suponhamos que Miau seja um gato típico, e vamos acrescentar isso à nossa dedução:

1.	$Gm \to \neg Nm$	P	
2.	$\neg Nm \to \neg Pm$	P	$?Gm \to \neg Pm$
3.	$\mid Gm$	H	$?\neg Pm$

Note duas coisas que acontecem. Primeiro, a proposição 'Miau é um gato típico' foi acrescentada como *hipótese* (H): isso serve para diferenciá-la das premissas, cuja verdade não é, no contexto do argumento, colocada em dúvida. Uma hipótese adicional numa derivação é apenas uma *suposição temporária*, da qual nos livraremos mais tarde, se tudo correr bem. Segundo, colocamos uma linha vertical à esquerda da fórmula Gm. Isso serve para indicar que as fórmulas que ocorrem à direita desta linha têm um caráter hipotético, de "fantasia", por assim dizer. Fórmulas que forem derivadas nesse contexto só podem ser empregadas dentro dele. E, terceiro, agora que fizemos a hipótese, estamos procurando derivar o conseqüente do condicional — isto foi assinalado na linha 3, escrevendo $?\neg Pm$ depois da justificativa H da fórmula Gm.

Bem, agora que temos a hipótese adicional Gm, podemos utilizar uma das regras de inferência já conhecidas, no caso, *modus ponens*, e

deduzir $\neg Nm$ a partir do condicional da linha 1. Uma nova aplicação de MP envolvendo $\neg Nm$ e a linha 2 nos permite concluir $\neg Pm$. Nossa derivação ficaria assim:

1.	$Gm \to \neg Nm$	P	
2.	$\neg Nm \to \neg Pm$	P	$?Gm \to \neg Pm$
3.	| Gm	H	$?\neg Pm$
4.	| $\neg Nm$	1,3 MP	
5.	| $\neg Pm$	2,4 MP	

O que aconteceu? A suposição de que Gm fosse verdadeira nos levou a concluir que $\neg Pm$ também o seria. Isto é, acabamos de mostrar que, se temos Gm, então temos $\neg Pm$. Em outras palavras, *se* Gm, *então* $\neg Pm$: o condicional que estávamos procurando demonstrar. Em virtude disso, podemos agora legitimamente introduzir $Gm \to \neg Pm$ em nossa dedução:

1.	$Gm \to \neg Nm$	P	
2.	$\neg Nm \to \neg Pm$	P	$?Gm \to \neg Pm$
3.	| Gm	H	$?\neg Pm$
4.	| $\neg Nm$	1,3 MP	
5.	| $\neg Pm$	2,4 MP	
6.	$Gm \to \neg Pm$	3–5 RPC	

Como você vê, pusemos um fim à linha vertical que marcava o uso da hipótese auxiliar Gm. O que fizemos foi *descartar* essa hipótese — saímos de uma fantasia e voltamos ao "mundo real".

A justificativa para a linha 6 é '3–5 RPC', o que significa que $Gm \to \neg Pm$ foi obtida a partir das linhas 3 a 5 pela *regra de prova condicional*, cuja formulação é a seguinte:

$$\begin{array}{l} \mid \alpha \\ \mid \vdots \\ \mid \beta \\ \alpha \to \beta \end{array}$$

Isto é, se, a partir de uma hipótese α você deriva uma fórmula β, então você pode descartar α e introduzir $\alpha \to \beta$ na derivação.

Ficou claro? Então vamos dar uma olhada em mais um exemplo. Suponha que estamos querendo mostrar a validade do seguinte argumento:

$$Pa \rightarrow (Qb \rightarrow Fab) \vdash Qb \rightarrow (Pa \rightarrow Fab)$$

Como a fórmula a derivar é um condicional, podemos utilizar a estratégia de fantasiar e supor que seu antecedente é verdadeiro, acrescentando-o como hipótese:

$$\begin{array}{lll} 1. & Pa \rightarrow (Qb \rightarrow Fab) & \text{P} \quad ?Qb \rightarrow (Pa \rightarrow Fab) \\ 2. & \mid Qb & \text{H} \quad ?Pa \rightarrow Fab \end{array}$$

Mas, agora, dentro da fantasia, o que desejamos derivar é a fórmula $Qb \rightarrow Fab$, que também é um condicional. Podemos usar aqui a mesma estratégia, adotando Qb como hipótese? Naturalmente:

$$\begin{array}{lll} 1. & Pa \rightarrow (Qb \rightarrow Fab) & \text{P} \quad ?Qb \rightarrow (Pa \rightarrow Fab) \\ 2. & \mid Qb & \text{H} \quad ?Pa \rightarrow Fab \\ 3. & \mid \; \mid Pa & \text{H} \quad ?Fab \end{array}$$

Temos aqui uma fantasia dentro de uma fantasia. É o que acontece quando você está assistindo a um filme na TV e, de repente, um dos personagens senta-se em uma poltrona e começa, ele também, a assistir a um filme na TV.

Feitas essas hipóteses adicionais, tentaremos primeiramente derivar Fab — para mostrar $Pa \rightarrow Fab$, para, em seguida, mostrar $Qb \rightarrow (Pa \rightarrow Fab)$. Como temos a hipótese Pa, podemos usá-la com a linha 1 e MP para obter $Qb \rightarrow Fab$. Usando agora a hipótese Qb da linha 2, derivamos Fab, que é o que desejávamos. Feito isso, passamos a descartar as hipóteses introduzidas:

$$\begin{array}{lll} 1. & Pa \rightarrow (Qb \rightarrow Fab) & \text{P} \quad ?Qb \rightarrow (Pa \rightarrow Fab) \\ 2. & \mid Qb & \text{H} \quad ?Pa \rightarrow Fab \\ 3. & \mid \; \mid Pa & \text{H} \quad ?Fab \\ 4. & \mid \; \mid Qb \rightarrow Fab & \text{1,3 MP} \\ 5. & \mid \; \mid Fab & \text{2,4 MP} \\ 6. & \mid Pa \rightarrow Fab & \text{3–5 RPC} \\ 7. & Qb \rightarrow (Pa \rightarrow Fab) & \text{2–6 RPC} \end{array}$$

Note, portanto, que tivemos duas linhas verticais correndo paralelas, cada uma marcando o âmbito de validade de hipótese com ela

introduzida. Note também que, ao descartarmos as hipóteses, nós o fizemos *na ordem inversa em que elas foram introduzidas*: é a regra do elevador, em que os últimos a entrar são os primeiros a sair. Se não preservarmos essa ordem, teremos logo uma série de problemas. O que nos traz, assim, a algumas considerações gerais sobre o uso apropriado da estratégia e da regra de prova condicional, que você encontra a seguir.

I. Introduzirás na derivação uma linha vertical toda vez que introduzires uma hipótese adicional; a cada hipótese corresponderá uma linha, e a cada linha uma hipótese, pois assim está escrito.

II. Não usarás uma fórmula que ocorre à direita de uma linha vertical depois de terminada essa linha, pois, caso contrário, tuas derivações, e as derivações de tuas derivações, serão falaciosas setenta vezes sete vezes.

III. Descartarás as hipóteses na ordem inversa em que foram introduzidas, e não usarás outra ordem para descartá-las.

IV. Não darás uma dedução por terminada enquanto não descartares todas as hipóteses adicionais.

V. Não farás mau uso das regras de inferência, nem terás outras regras além das que aqui te forem dadas.

Gostaria de chamar à sua atenção em especial o preceito II. Qualquer fórmula derivada sob uma hipótese vale apenas no contexto fantasioso dessa hipótese; assim, uma vez descartada a tal hipótese, todas as fórmulas derivadas por seu intermédio não estão mais disponíveis, não podem mais ser usadas. A fantasia é eliminada, e com ela tudo o que ela continha.

Falta agora examinar apenas mais uma regra. Além da derivação condicional temos ainda uma outra estratégia que pode ser usada, chamada *derivação indireta*, ou *redução ao absurdo*. Se existe uma proposição α que desejamos demonstrar, a estratégia consiste em supor, em primeiro lugar, que α não é o caso, ou seja, introduzimos $\neg\alpha$ como hipótese. Se dessa hipótese conseguirmos derivar uma contradição — i.e., a conjunção de uma fórmula β e sua negação, $\neg\beta$ —

então a hipótese $\neg\alpha$ deve ser falsa. Assim, uma vez que estamos na lógica clássica, α deve ser verdadeira.[2] Vejamos um exemplo. Suponhamos que eu quisesse mostrar que

$$Cb \to \neg Fnp \vdash \neg(Cb \wedge Fnp)$$

Uma demonstração indireta seria assim:

$$\begin{array}{lll}
1. & Cb \to \neg Fnp & \text{P} \quad ?\neg(Cb \wedge Fnp) \\
2. & \quad | \; Cb \wedge Fnp & \text{H} \quad ?\text{CTR} \\
3. & \quad | \; Cb & 2\ \text{S} \\
4. & \quad | \; \neg Fnp & 1,3\ \text{MP} \\
5. & \quad | \; Fnp & 2\ \text{S} \\
6. & \quad | \; Fnp \wedge \neg Fnp & 4,5\ \text{C} \\
7. & \neg(Cb \wedge Fnp) & 2\text{–}6\ \text{RAA}
\end{array}$$

A linha 2 caracteriza a introdução de uma hipótese para derivação indireta: estamos supondo o contrário do que pretendemos demonstrar, e nosso objetivo agora, como indicado na linha 2 por meio de ?CTR, é obter uma *contradição* $\beta \wedge \neg\beta$ — não importa que fórmula seja β. A partir disso, usamos algumas regras de inferência para derivar $\neg Fnp$ e Fnp, o que, obviamente, não pode ser o caso. Logo, mostramos que a hipótese adicional é errônea; ela é descartada, e sua negação (a fórmula original que desejávamos demonstrar) é, assim, aceita como verdadeira.

A linha 7, portanto, introduz a conclusão desejada, tendo como justificativa RAA, a regra de redução ao absurdo, cuja formulação é a seguinte:

$$\begin{array}{l}
\quad | \; \alpha \\
\quad | \; \vdots \\
\quad | \; \beta \wedge \neg\beta \\
\neg\alpha
\end{array}$$

Isto é, se, a partir de uma hipótese α, você deriva uma contradição, $\beta \wedge \neg\beta$, então você pode descartar α e introduzir $\neg\alpha$ na derivação.

[2]Existem, naturalmente, sistemas de lógica que não aceitam essa estratégia de prova por absurdo. Cf. cap. 18.

A propósito, você se recorda de que uma contradição é uma fórmula falsa em qualquer estrutura. No caso de RAA, contudo, estamos exigindo um tipo particular de contradição — somente se você tiver encontrado uma fórmula que tenha a forma $\beta \wedge \neg\beta$, não importa qual seja a fórmula β, você pode usar a regra RAA. Isso é um requisito formal da regra.

Finalmente, cabe lembrar que os mandamentos sobre introdução e descarte de hipóteses no caso de RPC aplicam-se aqui também.

Exercício 14.4 Abaixo você encontra algumas deduções já feitas. Dê a justificativa para as linhas que não a têm.

(a)

1.	$(Pa \vee Rb) \rightarrow (D \wedge \neg Cb)$	P
2.	$\mid Rb$	
3.	$\mid Pa \vee Rb$	
4.	$\mid D \wedge \neg Cb$	
5.	$\mid \neg Cb$	
6.	$\mid \neg Cb \vee E$	
7.	$Rb \rightarrow (\neg Cb \vee E)$	

(b)

1.	$Ca \rightarrow Qb$	P
2.	$\neg Qb \wedge Sp$	P
3.	$\neg Qb$	
4.	$\mid Ca$	
5.	$\mid Qb$	
6.	$\mid Qb \wedge \neg Qb$	
7.	$\neg Ca$	

(c)

1.	$Ap \rightarrow (Rs \leftrightarrow (Bq \vee Tc))$	P
2.	$Cs \vee Lb$	P
3.	$Lb \rightarrow Ap$	P
4.	$\mid \neg Cs$	
5.	$\mid \mid Bq$	
6.	$\mid \mid Lb$	
7.	$\mid \mid Ap$	
8.	$\mid \mid Rs \leftrightarrow (Bq \vee Tc)$	
9.	$\mid \mid (Bq \vee Tc) \rightarrow Rs$	
10.	$\mid \mid Bq \vee Tc$	
11.	$\mid \mid Rs$	
12.	$\mid Bq \rightarrow Rs$	
13.	$\neg Cs \rightarrow (Bq \rightarrow Rs)$	

(d)

1.	$Ta \rightarrow Nsp$	P
2.	$Ta \vee Fp$	P
3.	$E \rightarrow \neg Fp$	P
4.	$\neg Nsp$	P
5.	$\mid Ta$	
6.	$\mid Nsp$	
7.	$\mid Nsp \wedge \neg Nsp$	
8.	$\neg Ta$	
9.	Fp	
10.	$\mid E$	
11.	$\mid \neg Fp$	
12.	$\mid Fp \wedge \neg Fp$	
13.	$\neg E$	

Exercício 14.5 Prove a validade das formas de argumento abaixo. Você vai precisar introduzir uma hipótese — mas apenas uma.

(a) $Pa \rightarrow Qb,\ Qb \rightarrow C \vdash Pa \rightarrow C$

(b) $Pa \rightarrow \neg Qb,\ Qb \vee Rab \vdash Pa \rightarrow Rab$

(c) $Fa \rightarrow Ga,\ \neg Ga \vdash \neg Fa$

(d) $Pa \vdash (Pa \rightarrow Qb) \rightarrow Qb$
(e) $Pa \vee Pa \vdash Pa$
(f) $Pa, \neg Pa \vdash Qb$
(g) $Pa \rightarrow (Qb \rightarrow C) \vdash (Pa \wedge Qb) \rightarrow C$
(h) $\neg Lbca \rightarrow Lbca \vdash Lbca$
(i) $Fs \wedge Ga \vdash \neg(Fs \rightarrow \neg Ga)$

Exercício 14.6 Prove a validade das formas de argumento abaixo. Agora, você vai precisar introduzir, em cada caso, mais de uma hipótese.

(a) $(Ts \wedge Pc) \rightarrow Qa \vdash Ts \rightarrow (Pc \rightarrow Qa)$
(b) $A \rightarrow (Ms \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow Ms) \rightarrow (A \rightarrow C)$
(c) $Pa \rightarrow ((Qb \rightarrow D) \rightarrow Rab) \vdash (Qb \rightarrow D) \rightarrow (Pa \rightarrow Rab)$
(d) $Qa \rightarrow Rb, Cp \rightarrow \neg Rb \vdash Qa \rightarrow \neg Cp$
(e) $\neg Ap \vee Bsa \vdash Ap \rightarrow Bsa$
(f) $\neg Qa \rightarrow \neg A \vdash (\neg Qa \rightarrow A) \rightarrow Qa$

14.5 Estratégias de Derivação

Na seção anterior, você viu a introdução de algumas regras de inferência, como RPC, que são utilizadas juntamente com uma estratégia de derivação. Em particular, RPC está associada à estratégia de introduzir hipóteses adicionais para possibilitar a derivação. Contudo, até agora as hipóteses que estávamos introduzindo tinham uma característica bem definida: elas eram ou antecedentes de condicionais (para RPC), ou a negação da conclusão desejada (para RAA). Por exemplo, para mostrar um condicional $\beta \rightarrow \gamma$, você introduzia β como hipótese; para mostrar α por absurdo, você introduzia $\neg\alpha$. Mas, na verdade, não há nenhuma restrição quanto ao tipo de fórmula que se pode introduzir como hipótese em uma derivação.

Veja o seguinte exemplo, onde procuramos mostrar que $Fp \rightarrow Rca \vdash \neg Fp \vee Rca$:

1.	$Fp \rightarrow Rca$	P	$?\neg Fp \vee Rca$
2.	$\mid \neg(\neg Fp \vee Rca)$	H	?CTR

Na linha 2, introduzimos a negação de nosso objetivo, $\neg(\neg Fp \vee Rca)$, pois é a única possibilidade nesse caso. Mas, mesmo assim, se

você examinar o conjunto das regras de inferência diretas que temos a nosso dispor, perceberá que não existe nenhuma delas que possa ser aplicada para derivar uma contradição. Por outro lado, se pudéssemos, agora, derivar $\neg Fp \vee Rca$, em contradição com a linha 2, nossos problemas estariam resolvidos. Uma vez que $\neg Fp \vee Rca$ é uma disjunção, bastaria derivar um de seus elementos para obtê-la por expansão. Uma continuação possível neste momento seria, portanto, adicionar Fp e tentar derivar primeiramente $\neg Fp$ (uma outra maneira seria tentar derivar Rca). Você pode ver que isso funciona na derivação completa abaixo:

1.	$Fp \rightarrow Rca$	P	$?\neg Fp \vee Rca$
2.	$\mid\ \neg(\neg Fp \vee Rca)$	H	?CTR
3.	$\mid\ \mid\ Fp$	H	?CTR
4.	$\mid\ \mid\ Rca$	1,3 MP	
5.	$\mid\ \mid\ \neg Fp \vee Rca$	4 E	
6.	$\mid\ \mid\ (\neg Fp \vee Rca) \wedge \neg(\neg Fp \vee Rca)$	2, 5 C	
7.	$\mid\ \neg Fp$	3–6 RAA	
8.	$\mid\ \neg Fp \vee Rca$	7 E	
9.	$\mid\ (\neg Fp \vee Rca) \wedge \neg(\neg Fp \vee Rca)$	2, 8 C	
10.	$\neg\neg(\neg Fp \vee Rca)$	2–9 RAA	
11.	$\neg Fp \vee Rca$	10 DN	

Como você pode notar, o caminho é longo, e tivemos de usar hipóteses adicionais que, à primeira vista, não pareciam ter uma relação muito direta com nosso objetivo inicial. Mas a estratégia funcionou, e a lição importante a tirar é: em princípio, *qualquer* fórmula pode ser introduzida como hipótese em uma derivação. (Obviamente, a hipótese deve ser descartada depois.)

Com o exemplo acima e exercícios anteriores, você certamente notou que não há uma maneira única e preestabelecida de fazer uma derivação: o exemplo anterior trouxe duas alternativas, e, freqüentemente, há várias. Achar um caminho é muitas vezes uma questão de engenhosidade e habilidade. Contudo, aqui vão algumas sugestões (algumas já mencionadas em seções anteriores) para facilitar sua vida ao tentar fazer uma derivação — caso, obviamente, uma derivação direta e imediata não seja possível:

Condicional: Para derivar um condicional, adicione seu antecedente como hipótese, e procure derivar o conseqüente.

Conjunção: Para derivar uma conjunção, procure derivar cada elemento individualmente; depois, junte-os usando a regra da conjunção (C).

Bicondicional: Derive primeiro os condicionais correspondentes, e depois aplique CB.

Negação: Assuma a fórmula não-negada como hipótese, e tente derivar uma contradição.

Disjunção: Veja se é possível derivar um ou outro disjuntivo, e depois use Expansão. Se não, introduza a disjunção negada como hipótese e tente prova por absurdo (eventualmente, tentando obter algum dos disjuntivos para, por Expansão, conseguir uma contradição com a hipótese).

Negação de condicional: Em uma prova por absurdo, se houver alguma linha contendo a negação de um condicional, introduza o antecedente do condicional como hipótese, e tente derivá-lo. Uma vez derivado o condicional, você pode imediatamente derivar uma contradição.

Vamos ver mais um exemplo, envolvendo o último dos casos acima: quando encontramos a negação de um condicional. Este exemplo servirá também para ilustrar um pouco uma das aplicações do arsenal de regras de dedução que estivemos vendo até agora: mostrar a validade de argumentos, claro.

Considere então o seguinte:

> Não é o caso que, se Miau gosta de peixes, ele é um gato. Se Miau gosta de peixes, então ele gosta de nadar. Miau é um gato. Logo, Miau gosta de nadar.

Formalizemos esse argumento, usando m para Miau, G para 'x é um gato', P para 'x gosta de peixes' e N para 'x gosta de nadar'. Temos então (já começando a fazer a dedução):

1.	$\neg(Pm \rightarrow Gm)$	P	
2.	$Pm \rightarrow Nm$	P	
3.	Gm	P	?Nm
4.	$\mid \neg Nm$	H	?CTR

Na linha 1, temos um condicional negado. O que fazer com ele? O mais provável vai ser que possamos utilizá-lo em uma prova por RAA para obter uma contradição. E, de fato, usar RAA parece ser a estratégia mais promissora acima, porque não há uma maneira óbvia de obter Nm. (Por isso eu já fui adiantando aquela hipótese na linha 4.)

Muito bem, estamos então procurando uma contradição — mais especificamente, $\beta \wedge \neg\beta$, qualquer que seja β. Bem, um bom candidato para $\neg\beta$ seria a fórmula $\neg(Pm \rightarrow Gm)$. Nesse caso, precisamos apenas obter $Pm \rightarrow Gm$. Ora, essa fórmula é obviamente um condicional — assim, vamos acrescentar seu antecedente como hipótese, e ver o que acontece.

1.	$\neg(Pm \rightarrow Gm)$	P	
2.	$Pm \rightarrow Nm$	P	
3.	Gm	P	?Nm
4.	$\mid \neg Nm$	H	?CTR
5.	$\mid \; \mid Pm$	H	?Gm

Note agora algo interessante: estamos querendo obter Gm — mas *já temos* Gm, na linha 3! Porém, a regra RPC é explícita: Gm tem que aparecer *abaixo* da hipótese Pm para que RPC possa ser usada. O que fazer?

Há um belo truque — quase um truque de mágica — que pode nos ajudar aqui. Já que procuramos derivar Gm sob a hipótese Pm, vamos introduzir $\neg Gm$ como uma nova hipótese, e tentar derivar uma contradição! O que é imediato, pois já temos Gm. A derivação fica então assim:

1.	$\neg(Pm \rightarrow Gm)$	P	
2.	$Pm \rightarrow Nm$	P	
3.	Gm	P	?Nm
4.	$\mid \neg Nm$	H	?CTR
5.	$\mid \; \mid Pm$	H	?Gm

6.	$\neg Gm$	H ?CTR
7.	$Gm \land \neg Gm$	3, 6 C
8.	$\neg\neg Gm$	5–7 RAA
9.	Gm	8 DN

E agora, basta concluir. Podemos aplicar RPC para obter o desejado condicional $Pm \rightarrow Gm$, usá-lo com sua negação, na linha 1, para obter uma contradição e, assim, a conclusão final que queríamos. Eis a dedução acabada:

1.	$\neg(Pm \rightarrow Gm)$	P
2.	$Pm \rightarrow Nm$	P
3.	Gm	P ?Nm
4.	$\neg Nm$	H ?CTR
5.	Pm	H ?Gm
6.	$\neg Gm$	H ?CTR
7.	$Gm \land \neg Gm$	3, 6 C
8.	$\neg\neg Gm$	6–7 RAA
9.	Gm	8 DN
10.	$Pm \rightarrow Gm$	5–9 RPC
11.	$(Pm \rightarrow Gm) \land \neg(Pm \rightarrow Gm)$	1, 10 C
12.	$\neg\neg Nm$	4–11 RAA
13.	Nm	12 DN

Aplique isso tudo agora no exercício a seguir.

Exercício 14.7 Simbolize os argumentos abaixo na linguagem do **CQC** e mostre sua validade, usando dedução natural.

(a) Miau não é, ao mesmo tempo, um gato e um cachorro. Miau é um gato. Logo, Miau não é um cachorro. (m: Miau; G: x é um gato; C: x é um cachorro)

(b) Se Miau é um gato e Cleo é um peixinho, então Fido não é um cachorro. Ou Fido é um cachorro, ou Miau e Cleo gostam de nadar. Miau é um gato se e somente se Cleo é um peixinho. Logo, se Miau é um gato, Miau gosta de nadar. (m: Miau; c: Cleo; f: Fido; G: x é um gato; P: x é um peixinho; C: x é um cachorro; N: x gosta de nadar)

(c) Se Miau caça, ele apanha ratos. Se ele não dorme bastante, então ele caça. Se ele não apanha ratos, ele não dorme bastante. Logo, Miau apanha ratos. (m: Miau; C: x caça; R: x apanha ratos; D: x dorme bastante)

(d) Se Stefan está doente, Mathias não vai à escola. Se Mathias está doente, Stefan não vai à escola. Stefan e Mathias vão à escola. Logo, nem Stefan nem Mathias estão doentes. (*s*: Stefan; *m*: Mathias; *D*: *x* está doente; *E*: *x* vai à escola)

(e) Se a Lua gira em torno da Terra e a Terra gira em torno do Sol, então Copérnico tinha razão. Se Copérnico tinha razão, então Ptolomeu não tinha razão. A Terra gira em torno do Sol. Logo, se a Lua gira em torno da Terra, Ptolomeu não tinha razão. (*l*: a Lua; *t*: a Terra; *s*: o Sol; *c*: Copérnico; *p*: Ptolomeu; G: *x* gira em torno de *y*; *R*: *x* tem razão)

(f) Se a Lua gira em torno da Terra, então a Terra gira em torno do Sol. Se a Terra gira em torno do Sol, então, se a Lua gira em torno da Terra, ou Copérnico ou Ptolomeu tinham razão. Copérnico tinha razão, se Ptolomeu não tinha razão. Nem Copérnico nem Ptolomeu tinham razão. Logo, a Lua não gira em torno da Terra. (*l*: a Lua; *t*: a Terra; *s*: o Sol; *c*: Copérnico; *p*: Ptolomeu; G: *x* gira em torno de *y*; *R*: *x* tem razão)

CAPÍTULO 15

DEDUÇÃO NATURAL (II)

Neste capítulo, vamos continuar trabalhando com o método de dedução natural. Como você se lembra do capítulo anterior, ainda ficaram faltando algumas regras de inferência — aquelas que tratam dos quantificadores. Isso é algo que vamos ver em breve, mas, antes, vamos tratar ainda de um outro tipo de regra, as *regras derivadas*, que, embora não sejam necessárias, tornam as coisas mais fáceis. Finalmente, veremos neste capítulo ainda como relacionar a noção sintática de conseqüência lógica, introduzida por meio de dedução natural, à noção semântica de conseqüência lógica, definida por meio de estruturas, que havíamos visto anteriormente.

15.1 Regras derivadas

No decorrer das várias deduções realizadas no capítulo anterior, várias vezes você chegou a algumas situações irritantes, como, por exemplo, supondo que você queria derivar Qab, as seguintes situações:

1.	$\neg Pa \vee Qab$	P	OU	1. $\neg\neg Pa \to Qab$	P
2.	Pa	P		2. Pa	P

Em ambos os casos, a vontade era de aplicar imediatamente SD ou MP para obter *Qab*, a conclusão desejada, uma vez que *Pa* é "a negação" de $\neg Pa$, e $\neg\neg Pa$ e *Pa*, afinal, "são a mesma coisa". Mas, obviamente, as regras de inferência que corresponderiam a isso,

$$\frac{\neg\alpha \vee \beta \qquad \alpha}{\beta} \qquad\qquad \frac{\neg\neg\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

não são nem silogismo disjuntivo, nem *modus ponens*, embora pareçam muito com elas. A solução, é claro, consiste em obter primeiro $\neg\neg Pa$, para poder aplicar então SD ou MP. Em ambos os casos, contudo, concluir diretamente $\neg\neg Pa$ a partir de *Pa* não é permitido: a regra de dupla negação funciona *eliminando* $\neg\neg$, não introduzindo.

Por outro lado, tendo uma fórmula α qualquer, é óbvio que podemos facilmente obter $\neg\neg\alpha$. Como você vê a seguir:

1.	α	P
2.	$\mid \neg\alpha$	H ?CTR
3.	$\mid \alpha \wedge \neg\alpha$	1,2 C
4.	$\neg\neg\alpha$	2–3 RAA

Portanto, toda vez que você quiser $\neg\neg\alpha$, tendo α, você só precisa copiar as linhas acima, substituindo α pela fórmula desejada: *Pa*, por exemplo. Aplicando isso à primeira daquelas deduções anteriores, onde queríamos derivar *Qab*, ficamos com o seguinte:

1.	$Pa \vee Qab$	P
2.	Pa	P
3.	$\mid \neg Pa$	H ?CTR
4.	$\mid Pa \wedge \neg Pa$	2,3 C
5.	$\neg\neg Pa$	3–4 RAA
6.	Qab	1,5 SD

Mas isso, embora resolva o problema, é obviamente muito aborrecido, e é aqui que aparecem as regras derivadas para facilitar as coisas. O que fizemos acima com as linhas 1–4, na verdade, foi *provar* que, qualquer que seja a fórmula α, se tenho α, posso ter $\neg\neg\alpha$. Isto é, essas linhas são uma justificação para o seguinte:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Mas isto não é uma nova regra? Claro. Apenas não é uma regra primitiva, isto é, aceita sem demonstração, mas uma *regra derivada*, que pode ser *provada a partir das outras*. Note que tudo o que se pode fazer com uma regra derivada pode também ser feito *sem* ela, usando-se apenas as regras iniciais. Nesse sentido, uma regra derivada não é, propriamente, uma "regra nova": se você quiser, pode pensar numa regra derivada como uma maneira de *abreviar* parte de uma dedução. Isto é, regras derivadas são regras de abreviação. Por exemplo:

1.	α	P	É UMA	1.	α	P
2.	$\neg\neg\alpha$	1 Regra Derivada	ABREVIAÇÃO DE	2.	| $\neg\alpha$	H
				3.	| $\alpha \wedge \neg\alpha$	1,2 C
				4.	$\neg\neg\alpha$	2–3 RAA

Ótimo, não? As coisas realmente ficam mais simples se pudermos usar caminhos mais curtos.

Essa primeira regra derivada será também chamada, para simplificar, de *dupla negação*. Assim, DN fica valendo agora nos dois sentidos: para retirar ou introduzir $\neg\neg$. Podemos representar esta nova versão de DN tal como você vê na figura 15.1. Em vez de um traço separando a premissa da regra de sua conclusão, temos agora *dois* traços. Isso significa que esta é uma regra de inferência *reversível*: ela funciona nas duas direções. Ou seja, a partir de $\neg\neg\alpha$ podemos concluir α; e, de α, podemos concluir $\neg\neg\alpha$.

Existem, claro, outras regras derivadas. Na verdade, você pode introduzir tantas regras derivadas quanto desejar, pois cada forma de argumento provada válida corresponde, se quisermos, a uma regra que diz: tendo tais ou quais premissas, de tal ou qual forma, pode-se concluir tal ou qual coisa. As regras derivadas usuais vão corresponder àquelas formas de argumento mais comumente empregadas, apenas isso.

Na figura 15.1, você encontra outras regras de inferência muito conhecidas, como, por exemplo, *modus tollens*, *contradição* e as *leis de*

Modus Tollens (MT):

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$$

Dupla Negação (DN):

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \text{ (linha dupla)}$$

Silogismo Hipotético (SH):

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Contradição (CTR):

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\beta}$$

Contraposição (CT):

$$\frac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha} \text{ (linha dupla)}$$

Leis de De Morgan (DM):

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta} \qquad \frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta} \text{ (linhas duplas)}$$

FIGURA 15.1 — Algumas regras de inferência derivadas.

De Morgan (assim chamadas por causa do lógico inglês Augustus de Morgan).

É fácil ver, para dar mais um exemplo, que a regra de *modus tollens* funciona mesmo: dada uma implicação $\alpha \to \beta$, e sendo β falsa, α não pode ser verdadeira, logo $\neg\alpha$. Podemos provar MT como se segue:

1.	$\alpha \to \beta$	P
2.	$\neg\beta$	P ?$\neg\alpha$
3.	| α	H
4.	| β	1,3 MP
5.	| $\beta \wedge \neg\beta$	2,4 C
6.	$\neg\alpha$	3–5 RAA

Nas linhas 1 e 2 temos as premissas da regra MT: $\alpha \to \beta$ e $\neg\beta$. Utilizando RAA chegamos até $\neg\alpha$ na linha 6. Isso mostra que $\neg\alpha$ pode, mesmo, ser obtida a partir das premissas $\alpha \to \beta$ e $\neg\beta$. Ou seja, a regra de *modus tollens* está justificada.

Algumas observações finais sobre regras derivadas. Primeiro, uma vez que tenhamos demonstrado (como fizemos para MT e DN acima) uma certa regra, podemos imediatamente começar a utilizá-la em deduções. Segundo, o que determina se uma regra é primitiva ou derivada é, basicamente, uma questão de *convenção*. Alguns autores preferem ter como regras primitivas regras diferentes das aqui empregadas: por exemplo, alguma outra coisa em vez de silogismo disjuntivo para eliminar uma disjunção. Alguns preferem um número maior de regras primitivas, para tornar o sistema mais fácil de usar; outros ainda, o menor número possível — apenas as regras necessárias para que o sistema de prova por dedução natural seja completo (isto é, capaz de provar todas as fórmulas válidas).

Exercício 15.1 Demonstre, como fizemos com MT, as demais regras de inferência apresentadas na figura 15.1. (No caso das regras reversíveis, demonstre que elas funcionam mesmo nas duas direções.)

15.2 Regras para quantificadores

Vamos agora passar às últimas regras que ainda nos faltam, para que tenhamos um conjunto completo de regras de inferência para o **CQC**: as regras que lidam com quantificadores. Para começar, note que com as regras vistas até agora é possível mostrar que alguns argumentos envolvendo quantificadores são válidos. Por exemplo, das premissas $\forall xPx \rightarrow \exists yQy$ e $\forall xPx$ podemos concluir, por *modus ponens*, $\exists yQy$.

Por outro lado, quando os quantificadores entram no jogo, a situação *é*, de fato, mais complicada. Como vimos ao falar de tablôs semânticos, o **CQC** é *indecidível*, significando que não há um algoritmo (ou seja, um procedimento mecânico efetivo) para decidir, em todo e qualquer caso, a (in)validade de um argumento. E isso, naturalmente, não se restringe aos tablôs, mas vale também para o método de dedução natural. O que se pode provar é que, se um argumento é válido, então existe para ele uma demonstração usando dedução natural. O problema, como veremos logo a seguir com os exercícios, é *encontrar* essa demonstração.

15.2.1 O quantificador universal

Vamos começar nos ocupando das regras de inferência para o quantificador universal. A primeira delas, chamada *eliminação do universal*, é praticamente a mesma já vista no caso dos tablôs: a idéia é de que, se alguma fórmula vale para todos os indivíduos, então vale para um certo indivíduo em particular, como Sócrates, Miau ou Claudia Schiffer. A regra tem a seguinte formulação:

Eliminação do Universal (E∀): $$\frac{\forall \mathbf{x}\alpha}{\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]}$$

onde $\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]$ é o resultado da substituição, em α, de todas as ocorrências livres da variável **x** por uma constante **c** qualquer. (Na verdade, poderíamos também fazer substituições de variáveis por variáveis, mas como nossos exemplos estarão sempre envolvendo fórmulas fechadas, vamos apresentar aqui uma versão um pouco mais restrita desta e das demais regras envolvendo quantificadores.[1])

Vamos ver um exemplo do funcionamento da eliminação do universal. Suponha que desejamos provar a validade do seguinte argumento:

> Qualquer gato gosta de qualquer peixe. Miau é um gato e Cleo é um peixe. Logo, Miau gosta de Cleo.

Usando G, P e L para simbolizar 'x é um gato', 'x é um peixe', e 'x gosta de y'; bem como m e c para 'Miau' e 'Cleo', temos o seguinte:

$$\forall x \forall y((Gx \wedge Py) \rightarrow Lxy),\ Gm \wedge Pc \ \vdash \ Lmc.$$

Uma demonstração da validade desse argumento, utilizando E∀, pode ser a seguinte:

[1] Isso não significa que tenhamos, então, um conjunto incompleto de regras. É claro que vale $Px \vDash \forall x Px$. Para mostrar isso usando dedução natural, basta convencionar que as fórmulas abertas devam ser lidas como quantificadas universalmente. Assim, mostramos que $Px \vdash \forall x Px$ ao mostrarmos que $\forall x Px \vdash \forall x Px$.

1.	$\forall x \forall y((Gx \wedge Py) \rightarrow Lxy)$	P
2.	$Gm \wedge Pc$	P ?Lmc
3.	$\forall y((Gm \wedge Py) \rightarrow Lmy)$	1 E$\forall$
4.	$(Gm \wedge Pc) \rightarrow Lmc$	3 E$\forall$
5.	Lmc	2,4 MP

Após escrever as premissas, nas linhas 1 e 2, o passo seguinte consiste em aplicar E$\forall$ à linha 1, obtendo, na linha 3, a fórmula $\forall y(Gm \wedge Py \rightarrow Lmy)$. Como a fórmula da linha 1 vale para qualquer indivíduo, então vale também para m. Claro que poderíamos ter substituído x por qualquer outra constante, como s ou c, mas isso seria de pouca utilidade no nosso argumento. (Vale notar que, do mesmo modo como nos tablôs semânticos, as fórmulas universais podem ser reutilizadas tantas vezes quanto necessário. Aqui não foi preciso, mas eventualmente poderá ser, como você verá posteriormente em alguns exercícios.) Uma segunda aplicação de E$\forall$, agora à linha 3, nos deixa, então, com $(Gm \wedge Pc) \rightarrow Lmc$, e MP nos dá a conclusão desejada. A propósito, você deve ter notado que eliminamos os quantificadores um de cada vez: primeiro eliminamos $\forall x$, obtendo a linha 3, e então $\forall y$, obtendo a linha 4. Não é possível passar diretamente da linha 1 à linha 4, pois a regra E$\forall$ autoriza a eliminação de apenas um quantificador de cada vez.

Um outro exemplo da aplicação dessa regra, agora envolvendo uma hipótese para redução ao absurdo. Suponhamos que quiséssemos mostrar que

$$\neg Gm \vdash \neg \forall x Gx,$$

ou seja, se Miau não é um gato, segue-se que nem todos são gatos. Uma derivação pode ser como segue:

1.	$\neg Gm$	P ?$\neg \forall x Gx$
2.	| $\forall x Gx$	H ?CTR
3.	| Gm	2 E$\forall$
4.	| $Gm \wedge \neg Gm$	1,3 C
5.	$\neg \forall x Gx$	2–4 RAA

No caso introduzimos como hipótese para RAA a afirmação de que todos são gatos, e derivamos a partir disso a contradição Miau é e não é um gato. Simples.

Há apenas uma coisa que você deve cuidar ao usar E$\forall$: é partir de uma fórmula *universal*. O erro abaixo, por exemplo, é muito fácil de cometer:

1.	$\forall xPx \rightarrow Qb$	P	
2.	$Pa \rightarrow Qb$	1 E$\forall$	(INCORRETO!)

A fórmula na linha 1, $\forall xPx \rightarrow Qb$, *não é* uma fórmula universal, mas um *condicional*, o que você vê facilmente se recolocar os parênteses: $(\forall xPx \rightarrow Qb)$. Já $\forall x(Px \rightarrow Qb)$ *é* uma fórmula universal, e você poderia usar E$\forall$ para derivar, por exemplo, $Pa \rightarrow Qb$. Assim, tenha cuidado.

A primeira das regras para o quantificador universal, portanto, não apresenta nenhuma complicação. Passemos à próxima, começando por um exemplo. Suponhamos que desejássemos demonstrar a validade do seguinte argumento:

> Todos os gregos são humanos, e nenhum humano é imortal; logo, nenhum grego é imortal.

Passando o argumento para a linguagem do **CQC**, ficaríamos com o seguinte:

$$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Ix) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Ix).$$

A conclusão desejada é que nenhum grego é imortal. Bem, é fácil demonstrar, para um grego qualquer — digamos, Aristóteles —, que, se Aristóteles é grego, então não é imortal:

1.	$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	P	
2.	$\forall x(Hx \rightarrow \neg Ix)$	P	$?\forall x(Gx \rightarrow \neg Ix)$
3.	$Ga \rightarrow Ha$	1 E$\forall$	
4.	$Ha \rightarrow \neg Ia$	2 E$\forall$	
5.	$Ga \rightarrow \neg Ia$	3,4 SH	

Obviamente, a mesma derivação poderia mostrar que, se Sócrates é grego, então Sócrates não é imortal, e igualmente para Platão, Fídias, e todos eles, incluindo os Sete Sábios da Grécia e seus parentes. Mas é claro que, na prática, não podemos fazer isso: precisamos de

alguma regra que nos permita passar da afirmação de que um indivíduo qualquer, como Aristóteles, sendo grego, não é imortal, para a afirmação de que nenhum grego é imortal. Isso é alcançado com a regra de *introdução do universal*, que veremos a seguir. A idéia é que, como a dedução acima vale para um indivíduo qualquer — nós não fizemos nenhuma suposição especial a respeito dele — essa dedução tem um caráter geral. Assim, estaríamos autorizados a dar o seguinte passo, na linha 6:

1.	$\forall x(Gx \to Hx)$	P
2.	$\forall x(Hx \to \neg Ix)$	P ?$\forall x(Gx \to \neg Ix)$
3.	$Ga \to Ha$	1 E$\forall$
4.	$Ha \to \neg Ia$	2 E$\forall$
5.	$Ga \to \neg Ia$	3,4 SH
6.	$\forall x(Gx \to \neg Ix)$	5 I$\forall$

E nosso problema fica resolvido. A regra I$\forall$ tem a formulação abaixo, onde $\alpha(\mathbf{c})$ é uma fórmula contendo alguma ocorrência de uma certa constante **c**, e $\alpha[\mathbf{c}/\mathbf{x}]$ é o resultado da substituição em $\alpha(\mathbf{c})$ de *todas* as ocorrências da constante **c** pela variável **x**:

Introdução do Universal (I$\forall$): $$\frac{\alpha(\mathbf{c})}{\forall \mathbf{x}\alpha[\mathbf{c}/\mathbf{x}]}$$

desde que (i) a constante **c** não ocorra em nenhuma premissa, e em nenhuma hipótese que esteja valendo na linha onde α ocorre, e desde que (ii) **c** seja substitutível por **x** em α.

As restrições acima têm sua razão de ser. Se (i) não fosse respeitada, estaríamos validando, por exemplo, o seguinte argumento inválido:

1.	Gs	P	
2.	$\forall xGx$	1 I$\forall$	(INCORRETO!)

Nesse caso, na linha 2, a restrição não foi respeitada, pois a constante *s* ocorre na premissa. Como você vê, sem a restrição estaríamos erroneamente concluindo, do fato de que Sócrates é grego, que todos são gregos — o que, sabidamente, não é o caso.

Para explicar a restrição (ii) — de que a constante que sai, **c**, seja substituível pela variável **x** que entra em seu lugar — vou utilizar um exemplo. Considere a fórmula

$$\exists x Lxa,$$

que poderia informalmente significar, digamos, que alguém gosta de algum indivíduo qualquer a. Supondo que tivéssemos essa fórmula em uma dedução, e que a não ocorresse nem nas premissas, nem em hipótese vigente, qual seria o resultado de aplicar I∀ a essa fórmula, trocando a por x, se não tivéssemos a restrição (ii)? Ora, ficaríamos com

$$\forall x \exists x Lxx.$$

Porém, como o primeiro quantificador seria, então, supérfluo, ficaríamos com

$$\exists x Lxx,$$

que não é o que desejávamos. O problema se deu, claro, porque a constante **c** que foi substituída estava no escopo de um quantificador para a variável x que a estava substituindo. Precisamos evitar isso, e é o que podemos fazer com a seguinte definição:

Definição 15.1 *Seja α uma fórmula,* **t** *um termo qualquer, e* **x** *uma variável. Dizemos que* **t** *é substitutível por* **x** *em α se nenhuma parte de α da forma $\exists \mathbf{x}\beta$ ou $\forall \mathbf{x}\beta$ contém uma ocorrência de* **t**.

Em outras palavras, **t** é substitutível por uma variável **x** em uma fórmula α se **t** não tem nenhuma ocorrência em α que esteja no escopo de algum quantificador para **x**.

Finalmente, é bom ainda lembrar que *todas* as ocorrências da constante **c** em $\alpha(\mathbf{c})$ devem ser substituídas pela variável **x**. Caso contrário, poderíamos ter o seguinte problema (onde L representa 'x gosta de y' e N representa 'x é narcisista'):

1.	$\forall x(Lxx \rightarrow Nx)$	P	
2.	$Laa \rightarrow Na$	1 E∀	
3.	$\forall y(Lya \rightarrow Ny)$	2 I∀	(INCORRETO!)

Nesse caso estaríamos concluindo, a partir da afirmação de que todos os que gostam de si mesmos são narcisistas, que, para qualquer indivíduo, se ele gosta de Aristóteles, então ele é narcisista. O que não é correto. Um uso correto de I$\forall$ nos teria dado a fórmula $\forall y(Lyy \to Ny)$ na linha 3.

A figura 15.2 resume as regras de inferência para o quantificador universal.

Eliminação do Universal (E$\forall$)	*Introdução do Universal* (I$\forall$)
$\dfrac{\forall \mathbf{x}\alpha}{\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]}$	$\dfrac{\alpha(\mathbf{c})}{\forall \mathbf{x}\alpha[\mathbf{c}/\mathbf{x}]}$
para qualquer constante **c**	desde que a constante **c** não ocorra em premissa nem em hipótese vigente e seja substitutível por **x** em α

FIGURA 15.2 — Regras para o quantificador universal.

Os exercícios abaixo são para você fixar a aplicação das regras do quantificador universal.

Exercício 15.2 Demonstre a validade das seguintes formas de argumento:

(a) $\forall x(Px \to Qx), \neg Qb \vdash \neg Pb$

(b) $\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), Fc \vdash Gc$

(c) $\forall x(Px \to Qx), \forall x(Qx \to Rxb) \vdash Pa \to Rab$

(d) $\forall xFx \wedge \forall yHy, \forall z\forall xTzx \vdash Fa \wedge Tab$

(e) $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx$

(f) $\forall x(Ax \to Bx) \vdash \forall x(\neg Bx \to \neg Ax)$

(g) $\forall xPx \to \forall xQx, \neg Qa \vdash \neg\forall xPx$

(h) $\forall x\forall yLxy \vdash \forall y\forall xLxy$

Exercício 15.3 Traduza, usando a notação sugerida, e demonstre a validade:

(a) Todo papagaio é vermelho. Currupaco é um papagaio. Logo, Currupaco é vermelho. (*c*: Currupaco; *P*: *x* é um papagaio; *R*: *x* é vermelho)

(b) Nenhuma arara é vermelha. Todos os papagaios são vermelhos. Logo, nenhuma arara é um papagaio. (*A*: *x* é uma arara)
(c) Todo papagaio é vermelho ou verde. Currupaco não é verde. Logo, se Currupaco é um papagaio, então é vermelho. (*G*: *x* é verde)
(d) Todos amam todos. Logo, Romeu ama Julieta e Julieta ama Romeu. (*r*: Romeu; *j*: Julieta; *A*: *x* ama *y*)
(e) Todos os papagaios amam Julieta. Quem ama Julieta detesta Romeu. Quem detesta Romeu tem bom gosto. Logo, todos os papagaios têm bom gosto. (*D*: *x* detesta *y*; *G*: *x* tem bom gosto)

15.2.2 O quantificador existencial

Vamos agora nos ocupar das regras de inferência ainda faltantes, aquelas que tratam do quantificador existencial. Começaremos pela regra chamada *introdução do existencial*: se algum indivíduo, como Átila, tem uma propriedade, como ser um huno, então existe alguém que tem essa propriedade. Isto é, se Átila é um huno, podemos concluir que alguém é um huno. De modo mais geral, se alguma fórmula vale para um indivíduo em particular, então existe alguém a cujo respeito essa fórmula é verdadeira. A regra tem a seguinte formulação:

Introdução do Existencial (I∃): $$\frac{\alpha(\mathbf{c})}{\exists \mathbf{x}\alpha(\mathbf{c}/\mathbf{x})}$$

onde $\alpha(\mathbf{c})$ é uma fórmula contendo alguma ocorrência de uma constante **c**, e $\alpha(\mathbf{c}/\mathbf{x})$ é o resultado da substituição em α de *uma ou mais* das ocorrências da constante **c** pela variável **x** — desde, é claro, que **c** seja substituível por **x** em α. Note-se que, ao contrário das regras para o quantificador universal, não se exige que *todas* as ocorrências da constante **c** sejam substituídas. Pode-se, obviamente, substituir todas elas, mas isto não é obrigatório.

Vamos ver um exemplo do funcionamento dessa regra. Suponhamos que Platão seja um filósofo grego — segue-se que existe alguém com essas propriedades, isto é, existe um filósofo grego:

1.	$Fp \wedge Gp$	P
2.	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	1 I∃

Ao contrário da regra de introdução do universal, que colocava restrições sobre a ocorrência em premissas ou hipóteses da constante a ser eliminada, I$\exists$ não faz nada disso — como se vê no caso acima, onde p ocorre na premissa. E, para lembrar, não teria sido necessário substituir todas as ocorrências de p por x. As duas deduções seguintes também são perfeitamente legítimas:

1.	$Fp \land Gp$	P	1.	$Fp \land Gp$	P
2.	$\exists x(Fx \land Gp)$	1 I$\exists$	2.	$\exists x(Fp \land Gx)$	1 I$\exists$

Por outro lado, é bom lembrar que o quantificador a ser introduzido deve aplicar-se à fórmula como um todo. O exemplo seguinte mostra um erro fácil de cometer:

1.	$Fp \to Gp$	P	
2.	$\exists xFx \to Gp$	1 I$\exists$	(INCORRETO!)

Da afirmação de que 'se Platão é um filósofo, então ele é grego' não se segue que, se alguém é filósofo, então Platão é grego. Uma aplicação correta de I$\exists$ na linha 1 daria como resultado, por exemplo, $\exists x(Fx \to Gx)$, ou mesmo $\exists x(Fx \to Gp)$.

Uma questão interessante que poderia ser colocada agora é a seguinte: se uma propriedade é afirmada de um indivíduo, segue-se que *existe*, de fato, alguém que tem essa propriedade? Por exemplo, se afirmamos que Afrodite é uma figura mitológica, segue-se que *existe* alguém que é uma figura mitológica? Isto parece ser, no mínimo, contra-intuitivo, pois figuras mitológicas, pelo próprio sentido da expressão, não existem. Contudo, no **CQC**, a inferência é validada: de Ma podemos derivar $\exists xMx$. O **CQC**, como já vimos anteriormente ao tratar de estruturas, faz a pressuposição de que todos os nomes (constantes) denotam indivíduos existentes, e que existe pelo menos um indivíduo no universo. Isto garante a validade de inferências como a seguinte:

1.	$\forall xPx$	P
2.	Pa	1 E$\forall$
3.	$\exists xPx$	2 I$\exists$

Da premissa de que todos são poetas, podemos concluir que existe, de fato, alguém que é um poeta.[2]

A próxima (e última!) regra, chamada *eliminação do existencial*, é um pouco mais complicada. Na verdade, ela é uma regra de caráter hipotético, como RPC e RAA. O ponto de partida, por exemplo, é que existe algum indivíduo com alguma propriedade. Digamos, alguém é filósofo: $\exists xFx$. Então deveríamos poder concluir, de um indivíduo particular, que ele é um filósofo. Mas que indivíduo escolher? Platão? Einstein? Yoda? Como saber a quem a propriedade se aplica?

Como, de fato, não sabemos, ao eliminar o quantificador existencial devemos introduzir uma *constante nova*. Ela denotará o indivíduo que tem a propriedade em questão. Essa regra tem, assim, a seguinte formulação:

Eliminação do Existencial (E∃)

$$\frac{\exists \mathbf{x}\alpha \qquad \begin{array}{|l} \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}$$

onde α é uma fórmula contendo alguma ocorrência de uma variável **x**, e $\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]$ é o resultado da substituição em α de *todas* as ocorrências da variável **x** por alguma constante **c**, com a seguinte restrição: a constante **c** não ocorre em nenhuma premissa, nem em nenhuma hipótese que esteja valendo na linha onde $\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}]$ foi introduzida, nem em α, e nem em β.

Para simplificar a história, se temos uma fórmula do tipo $\exists \mathbf{x}\alpha$, podemos *fazer uma hipótese* que consiste em eliminar o quantificador $\exists \mathbf{x}$ e substituir todas as ocorrências de **x** em α por uma constante **c**, que, para todos os efeitos, não pode ter ocorrido em lugar nenhum. Se conseguimos concluir dessa hipótese alguma fórmula β na qual **c** *não mais ocorre*, podemos descartar a hipótese, e reafirmar β.

[2]Existem versões do cálculo de predicados que não fazem a pressuposição de que todo nome denota um indivíduo existente. Ou seja, podemos tratar de indivíduos inexistentes. São as chamadas *lógicas livres* (*free logics*), mas não nos ocuparemos delas aqui.

Vejamos um exemplo de como utilizar essa regra. Suponhamos que temos o seguinte argumento:

Existem gatos pretos; logo, existem gatos.

A demonstração ficaria como a seguir:

1.	$\exists x(Gx \wedge Px)$	P
2.	$\quad \vert\; Ga \wedge Pa$	H (para E∃)
3.	$\quad \vert\; Ga$	2 S
4.	$\quad \vert\; \exists x Gx$	3 I∃
5.	$\exists x Gx$	1, 2–4 E∃

Vamos examinar o papel de E∃ nessa demonstração. Tínhamos por premissa que existem gatos pretos, i.e., a fórmula $\exists x(Gx \wedge Px)$. O primeiro passo, na linha 2, foi introduzir uma hipótese para E∃: digamos que *a* denote o indivíduo que tem as propriedades ser gato e preto — mas não sabemos quem é o indivíduo *a*: é apenas um símbolo novo (note que *a* não ocorre na premissa, e, claro, em nenhuma hipótese, pois não havia nenhuma quando *a* foi introduzido na linha 2). Tendo agora a hipótese de que $Ga \wedge Pa$, fica fácil obter *Ga* por separação (linha 3). Como nosso objetivo é obter $\exists x Gx$, podemos fazer isso imediatamente a partir da linha 3, onde temos *Ga*, por I∃ (linha 4). Não seria agora muito correto concluir a demonstração com a linha 4; afinal, temos uma hipótese que não descartamos. É aqui que temos a eliminação da hipótese, usando E∃. Na verdade, obtivemos agora uma fórmula β (i.e., $\exists x Gx$) na qual a constante *a*, introduzida na hipótese, *não mais ocorre*. Logo, podemos descartar a hipótese da linha 2, e *reafirmar* $\exists x Gx$. É o que fazemos na linha 5.

Resumindo: a partir de uma fórmula existencial, faça uma hipótese, eliminando o quantificador e substituindo todas as ocorrências da variável que estava quantificada por alguma constante nova. Continue a dedução normalmente. No momento em que a constante introduzida desaparecer da fórmula β mais recentemente obtida, você pode descartar a hipótese e reafirmar β.

Exercício 15.4 A constante c introduzida por E∃, na verdade, não precisa ser necessariamente nova, isto é, uma constante que ainda não havia ocorrido na dedução. Quais são os dois casos em que você pode usar uma constante que já apareceu na dedução?

A figura 15.3 resume as regras de inferência para o quantificador existencial.[3]

Introdução do Existencial (I∃)	*Eliminação do Existencial* (E∃)
$$\frac{\alpha(c)}{\exists x\alpha(c/x)}$$ para qualquer constante **c** substitutível por **x** em α	$$\frac{\exists x\alpha \quad \begin{array}{|l} \alpha[x/c] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}$$ desde que a constante **c** não ocorra em premissa, nem em hipótese vigente, nem em α, nem em β

FIGURA 15.3 — Regras para o quantificador existencial.

Vamos ver agora um exemplo do que pode acontecer se não respeitarmos a restrição de que a constante introduzida deva ser um símbolo que não ocorre, por exemplo, em hipóteses ainda vigentes. Suponhamos que tivéssemos os seguintes fatos: algumas cobras são repelentes, e algumas aranhas são repelentes. Poderíamos ter o seguinte problema:

1.	$\exists x(Cx \wedge Rx)$	P	
2.	$\exists x(Ax \wedge Rx)$	P ?$\exists x(Ax \wedge Cx)$	
3.	| $Ca \wedge Ra$	H (E∃)	
4.	| | $Aa \wedge Ra$	H (E∃ ???)	
5.	| | Ca	3 S	
6.	| | Aa	4 S	
7.	| | $Aa \wedge Ca$	5,6 C	
8.	| $\exists x(Ax \wedge Cx)$	2, 4–7 E∃	(INCORRETO!)
9.	$\exists x(Ax \wedge Cx)$	1, 3–8 E∃	

[3]Existem outras versões da regra de eliminação do existencial, algumas onde ela não é tratada como regra hipotética. Mas então deve-se usar, por exemplo, um conjunto especial de símbolos, e fazer convenções de que a dedução não termina enquanto eles não foram eliminados, ou seja, a conclusão de um argumento não poderá conter constantes introduzidas por E∃.

Das premissas de que algumas cobras são repelentes, $\exists x(Cx \wedge Rx)$, e algumas aranhas são repelentes, $\exists x(Ax \wedge Rx)$, estamos aparentemente concluindo que algumas aranhas são cobras: $\exists x(Ax \wedge Cx)$, o que é, obviamente, uma dedução inválida (no mundo real, as premissas seriam, imagino, verdadeiras, e a conclusão naturalmente falsa). O erro foi que a constante a, utilizada na hipótese feita na linha 4, já ocorria numa hipótese anterior que ainda estava valendo: portanto, não era possível aplicar E$\exists$ na linha 8. Note que não é errado *fazer a hipótese* $Aa \wedge Ra$: por exemplo, você poderia querer introduzir essa hipótese para demonstrar algum condicional cujo antecedente seja $Aa \wedge Ra$, tal como $(Aa \wedge Ra) \rightarrow \exists y Cy$. Isso é permitido, claro. Errado, contudo, é descartar a hipótese da linha 4 usando E$\exists$ (o que foi feito, incorretamente, na linha 8). Ou seja, se a idéia era usar E$\exists$, a hipótese da linha 4 foi totalmente inadequada.

Exercício 15.5 Demonstre a validade dos seguintes argumentos:

(a) $Rab \vdash \exists x \exists y Rxy$
(b) $\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \exists x Qx$
(c) $\forall x(Px \vee Qx), \neg Qb \vdash \exists y Py$
(d) $\exists x Px \rightarrow \forall x \neg Qx, Pa \vdash \neg Qa$
(e) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x \neg Qx \vdash \exists x \neg Px$
(f) $\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx), \exists x Fx \vdash \exists x Gx$
(g) $\forall x(Px \vee Qx), \exists y \neg Py \vdash \exists z Qz$
(h) $\forall x((Ax \vee Bx) \rightarrow Cx), \exists x Ax \vdash \exists x Cx$

Exercício 15.6 Traduza, usando a notação sugerida, e demonstre a validade:

(a) Todo papagaio é vermelho. Existem papagaios. Logo, existem coisas vermelhas. (P: x é um papagaio; R: x é vermelho)
(b) Nenhuma arara é um papagaio. Currupaco é um papagaio. Logo, algo não é uma arara. (c: Currupaco; A: x é uma arara)
(c) Nenhum papagaio é cor-de-laranja. Algumas aves são papagaios. Logo, algumas aves não são cor-de-laranja. (B: x é uma ave; L: x é cor-de-laranja)
(d) Alguém é amado por todos. Logo, todos amam alguém. (A: x ama y)
(e) Qualquer um que seja mais perigoso que Natasha é mais perigoso que Boris. Há espiões mais perigosos que Natasha. Logo, há espiões mais perigosos que Boris. (b: Boris; n: Natasha; E: x é um espião; D: x é mais perigoso que y)
(f) As pessoas românticas são inspiradas pela Lua. Quem é inspirado pela Lua não gosta de rosas. Mas todos gostam ou de rosas ou de flores

do campo. Logo, pessoas românticas gostam de flores do campo. (*P*: *x* é uma pessoa romântica; *L*: *x* é inspirado pela Lua; *R*: *x* gosta de rosas; *F*: *x* gosta de flores do campo)

(g) Alberto é amigo daqueles que não são amigos de si mesmo. Logo, alguém é amigo de si mesmo. (*a*: Alberto; *F*: *x* é amigo de *y*)

(h) Tudo deve estar em movimento ou em repouso, mas um objeto em vôo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo. Mas o que sempre ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Como o que não está em movimento está em repouso, segue-se que um objeto em vôo está na verdade em repouso. [Um dos paradoxos de Zênon de Eléia] (*M*: *x* está em movimento; *R*: *x* está em repouso; *O*: *x* é um objeto em vôo; *E*: *x* sempre ocupa um espaço igual a si mesmo)

15.3 Uma regra derivada para quantificadores

Nesta curta seção, vamos falar um pouco sobre regras derivadas para quantificadores. Na verdade, veremos apenas uma regra, que vem em duas versões e, além disso, é reversível: a regra de *intercâmbio de quantificadores* (IQ). A formulação é a seguinte:

$$\frac{\neg\forall \mathbf{x}\alpha}{\exists \mathbf{x}\neg\alpha} \qquad\qquad \frac{\neg\exists \mathbf{x}\alpha}{\forall \mathbf{x}\neg\alpha}$$

Vamos demonstrar, tomando um dos casos, que a regra IQ funciona mesmo. Suponhamos que temos $\neg\forall \mathbf{x}\alpha$, e que queremos obter $\exists \mathbf{x}\neg\alpha$. A demonstração fica assim:

1.	$\neg\forall \mathbf{x}\alpha$	P ?$\exists \mathbf{x}\neg\alpha$
2.	$\mid\ \neg\exists \mathbf{x}\neg\alpha$	H ?CTR
3.	$\mid\ \mid\ \neg\alpha(c)$	H ?CTR
4.	$\mid\ \mid\ \exists \mathbf{x}\neg\alpha$	3 I$\exists$
5.	$\mid\ \mid\ \exists \mathbf{x}\neg\alpha \wedge \neg\exists \mathbf{x}\neg\alpha$	2,4 C
6.	$\mid\ \neg\neg\alpha(c)$	3–5 RAA
7.	$\mid\ \alpha(c)$	6 DN
8.	$\mid\ \forall \mathbf{x}\alpha$	7 I$\forall$
9.	$\mid\ \forall \mathbf{x}\alpha \wedge \neg\forall \mathbf{x}\alpha$	1,8 C
10.	$\neg\neg\exists \mathbf{x}\neg\alpha$	2–9 RAA
11.	$\exists \mathbf{x}\neg\alpha$	10 DN

Apenas duas observações sobre a demonstração acima. Primeiro, note que, na hipótese da linha 2, α(c) é uma fórmula que contém a constante **c** no lugar em que ocorria, em α, a variável **x**. Essa constante **c**, claro, deve ser qualquer constante nova na dedução. Segundo, na linha 8, usamos a regra I$\forall$, trocando **c** por uma variável. Não há problema nisso, já que a hipótese em que **c** foi introduzida, na linha 3, já não valia mais.

Exercício 15.7 Prove os demais casos da regra de intercâmbio de quantificadores.

Exercício 15.8 Demonstre:

(a) $\neg\forall x\neg Px \vdash \exists xPx$
(b) $\neg\exists x\neg Px \vdash \forall xPx$
(c) $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$
(d) $\forall xFx \wedge \forall xHx \vdash \forall x(Fx \wedge Hx)$
(e) $\forall x(Px \wedge \neg Rxb), \exists x(\neg Qx \vee Rxb), \forall x(\neg Rxb \rightarrow Qx) \vdash \exists yRyb$
(f) $\forall x(Fx \rightarrow Hx), \forall z(Tz \rightarrow Fz), \exists y(Ty \wedge Qy) \vdash \exists x(Hx \wedge Qx)$
(g) $\exists x(Px \wedge Qx) \vdash \exists xPx \wedge \exists xQx$
(h) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \exists x\neg Qx \vdash \neg\forall xPx$
(i) $\exists xPbx, \forall x\forall y(Pxy \rightarrow Syx) \vdash \exists xSxb$

15.4 Teoremas

Quando discutimos, em capítulos anteriores, uma noção semântica de conseqüência lógica, vimos que havia um tipo especial de fórmula, as fórmulas válidas, que são aquelas verdadeiras em toda e qualquer estrutura. Alternativamente, vimos que elas podem ser definidas como aquelas fórmulas que são conseqüência lógica do conjunto vazio de premissas.

Caracterizando conseqüência lógica de uma maneira sintática, como estamos fazendo neste capítulo, obtemos algo similar: os *teoremas*.

Definição 15.2 *Uma fórmula α é um teorema (do* **CQC***) se há uma dedução de α a partir do conjunto vazio de premissas.*

Assim, α é um teorema do **CQC** se e somente se $\varnothing \vdash \alpha$, o que abreviamos escrevendo simplesmente $\vdash \alpha$.

Bem, você talvez esteja achando difícil imaginar como é que alguma coisa pode ser conseqüência, isto é, deduzida, a partir de um conjunto vazio de premissas. Não é tão difícil como parece. Vamos verificar como podemos mostrar, por exemplo, que $\vdash (Fa \wedge Gb) \rightarrow Fa$.

1.	$\mid\ Fa \wedge Gb$	H
2.	$\mid\ Fa$	1 S
3.	$(Fa \wedge Gb) \rightarrow Fa$	1–2 RPC

Como você vê, para provar um teorema precisamos sempre de uma hipótese para iniciar a dedução — pode ser uma hipótese para RPC, ou para RAA. Vamos a um outro exemplo, mostrando que $\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$. Uma vez que essa fórmula é uma equivalência, teremos que provar primeiro $\vdash (A \vee A) \rightarrow A$, e depois $\vdash A \rightarrow (A \vee A)$.

1.	$\mid\ A \vee A$	H (RPC)
2.	$\mid\ \mid\ \neg A$	H (RAA)
3.	$\mid\ \mid\ A$	1,2 SD
4.	$\mid\ \mid\ A \wedge \neg A$	2,3 C
5.	$\mid\ \neg\neg A$	2–4 RAA
6.	$\mid\ A$	5 DN
7.	$(A \vee A) \rightarrow A$	1–6 RPC
8.	$\mid\ A$	H (RPC)
9.	$\mid\ A \vee A$	8 E
10.	$A \rightarrow (A \vee A)$	8–9 RPC
11.	$(A \vee A) \leftrightarrow A$	7,10 CB

Um conceito análogo ao de teorema é o de um *esquema de teorema*. Na dedução acima, demonstramos que $\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$. É fácil ver que uma dedução similar a esta mostraria que $\vdash (B \vee B) \leftrightarrow B$, ou que $\vdash (Fab \vee Fab) \leftrightarrow Fab$, ou ainda, que $\vdash (\forall xPx \vee \forall xPx) \leftrightarrow \forall xPx$. Para resumir isto, é óbvio que, qualquer que seja a fórmula α, podemos demonstrar que

$$\vdash (\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha.$$

A isso chamamos de um esquema de teorema. Esse esquema não é propriamente um teorema, pois teoremas são fórmulas do **CQC**, e $(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$ não é uma fórmula — lembre que α é uma *variável metalingüística*. Contudo, por uma questão de abuso de linguagem, freqüentemente fazemos referência a um esquema de teorema

chamando-o de 'teorema'. Não há problema, desde que você lembre o que é uma coisa, e o que é a outra.

A utilidade dos esquemas é que podemos usá-los para obter um teorema, apenas substituindo as variáveis metalingüísticas, como α, β etc., por fórmulas. Por exemplo, a partir do esquema $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$, podemos obter os teoremas $\neg\neg Pa \leftrightarrow Pa$, $\neg\neg(Fb \vee Qb) \leftrightarrow (Fb \vee Qb)$, e assim por diante.

Exercício 15.9 Mostre que as fórmulas abaixo são teoremas do **CQC**:

(a)	$\neg Pa \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)$	(g)	$\forall xRxx \rightarrow Raa$
(b)	$A \rightarrow (\exists xQx \vee A)$	(h)	$\neg\exists xRxx \rightarrow \neg Raa$
(c)	$\neg\neg Pa \leftrightarrow Pa$	(i)	$\forall x(Px \rightarrow Px)$
(d)	$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	(j)	$\forall x\neg(Px \wedge \neg Px)$
(e)	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(k)	$\exists x\forall yRxy \rightarrow \forall y\exists xRxy$
(f)	$A \vee \neg A$	(l)	$\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \forall xQx)$

15.5 Conseqüência sintática e conseqüência semântica

Agora que você já está bem familiarizado com o método de dedução natural, e sabe como mostrar, usando meios sintáticos, a validade de um argumento, chegou a hora de falarmos um pouco a respeito das relações entre a noções sintática e semântica de conseqüência lógica.

Você ainda se lembra da definição semântica de conseqüência: uma fórmula α é conseqüência lógica (semântica) de um conjunto Γ de fórmulas se toda estrutura que for modelo de Γ é um modelo de α, o que indicamos por $\Gamma \vDash \alpha$.

Como ficam as coisas no caso de conseqüência sintática? É bastante simples, e já vimos isso no capítulo anterior: um argumento é válido se sua conclusão puder ser produzida a partir das premissas por meio da aplicação de certas regras de inferência.

Recorde então a definição 14.2: se Γ é um conjunto de fórmulas, e α uma fórmula, dizemos que $\Gamma \vdash \alpha$ (i.e., Γ *deduz* α, ou α é uma *conseqüência sintática* de Γ) se existe uma *dedução* de α a partir de Γ.

Por outro lado, como já vimos, uma dedução de α a partir de um conjunto de fórmulas Γ é uma seqüência finita $\delta_1, \ldots, \delta_n$ de fórmulas, tal que $\delta_n = \alpha$ e todo δ_i nesta seqüência é ou uma premissa, ou hipótese a ser descartada, ou foi obtida, pela aplicação de alguma regra de inferência, a partir de fórmulas em $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$ — i.e., a partir de fórmulas *anteriores* a δ_i na seqüência. As regras de inferência, claro, devem ser as regras primitivas. Isso corresponde à idéia, introduzida antes, de que uma "dedução" envolvendo regras derivadas é, na verdade, a *abreviação* de uma dedução.

Tendo definido conseqüência sintática, o mais interessante e bonito a mostrar é que, no **CQC**, as duas noções coincidem. Isto é, α é uma conseqüência sintática de Γ se e somente se α é uma conseqüência semântica de Γ, o que equivale a dizer que o método de dedução natural é um sistema de prova correto e completo para o **CQC**. Correto, você recorda, porque se uma conclusão pode ser deduzida de um conjunto Γ de premissas, então ela de fato é conseqüência lógica (semântica) de Γ. E completo porque, se uma fórmula é conseqüência lógica (semântica) de um conjunto de premissas, há uma dedução demonstrando isso. Sintetizamos isso tudo no seguinte teorema, onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas (recorde que já havíamos visto algo parecido ao falar de tablôs semânticos):

Teorema 15.1 $\Gamma \vdash \alpha$ *se e somente se* $\Gamma \vDash \alpha$.

Este é o famoso Teorema de Correção e Completude, que vamos apenas enunciar, sem demonstrá-lo (voltaremos a falar nele mais tarde, entretanto). A parte correspondente à completude — i.e., se α é conseqüência semântica de Γ, então é conseqüência sintática — foi provada por Kurt Gödel (1906–1978) em 1930 (embora ele não utilizasse dedução natural, mas um sistema axiomático, que é outra maneira pela qual se pode caracterizar sintaticamente a noção de conseqüência lógica).

Um caso particular desse teorema — o corolário a seguir — ocorre quando o conjunto Γ é vazio. Assim:

Corolário 15.1 $\vdash \alpha$ *se e somente se* $\vDash \alpha$.

Isso mostra que as noções de fórmula válida e teorema também coincidem para o **CQC**.

A propósito, é importante enfatizar que há uma diferença entre teoremas *do* **CQC** (fórmulas demonstráveis sem o auxílio de premissas), e teoremas *sobre o* **CQC**, ou *meta-teoremas*, que são proposições (na metalinguagem) que demonstramos a respeito do cálculo.

Como um último exemplo de um conceito semântico a ter um correspondente sintático, vamos falar de satisfatibilidade e consistência. Você se recorda de que um conjunto Γ de fórmulas é *satisfatível* se ele tem modelo — i.e., se há uma estrutura que é modelo dele; uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras.

Um conceito análogo é o de um conjunto consistente, definido da seguinte maneira:

Definição 15.3 *Um conjunto Γ de fórmulas é consistente se e somente se não existe uma fórmula α tal que $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.*

Alternativamente, podemos dizer que um conjunto é consistente se não deduz uma contradição (uma fórmula da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$). Em conseqüência do teorema de completude acima mencionado, podemos mostrar, então, que um conjunto é consistente se e somente se é satisfatível.

Dizemos também que um conjunto Γ de fórmulas é *trivial* se, para qualquer fórmula α, $\Gamma \vdash \alpha$. Não deve ser uma surpresa muito grande o fato de que podemos demonstrar, na lógica clássica, que um conjunto é trivial se e somente se for inconsistente. Se Γ é trivial, então Γ deduz qualquer fórmula — inclusive, por exemplo, A e $\neg A$, de modo que Γ é inconsistente. Se, por outro lado, Γ é inconsistente, por definição, para alguma α, $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Agora, como temos CTR como uma das nossas regras de inferência, isto significa que Γ deduz qualquer fórmula β — e é portanto trivial.[4]

O quadro abaixo resume essas considerações sobre equivalência no **CQC** de conceitos sintáticos e semânticos.

[4] Vale mencionar que os conceitos de inconsistência e trivialidade não são equivalentes em todas as lógicas. Por exemplo, as lógicas paraconsistentes (ver cap. 18) permitem que trabalhemos com conjuntos de fórmulas que são inconsistentes, mas não triviais.

- *conseqüência semântica* $\Gamma \vDash \alpha$ — *conseqüência sintática* $\Gamma \vdash \alpha$
- *fórmula válida* $\vDash \alpha$ — *teorema* $\vdash \alpha$
- Γ *é satisfatível* — Γ *é consistente*

Uma vez que as definições sintática e semântica de conseqüência lógica são equivalentes no **CQC**, as propriedades que vimos a respeito de $\vDash$ na seção 11.3 vão agora valer a respeito de $\vdash$. Não vamos portanto repeti-las aqui, exceto a seguinte, o Teorema da Dedução (TD), que vale a pena mencionar:

Teorema 15.2 $\Gamma \vdash \sigma \to \beta$ *sse* $\Gamma \cup \{\sigma\} \vdash \beta$.

Observe que, no enunciado acima, σ deve ser uma sentença, ou seja, uma fórmula fechada. O teorema não vale nas duas direções se tivermos alguma fórmula aberta α no lugar de σ.

Vamos dar um exemplo de como o teorema da dedução pode ser de auxílio. Suponhamos que você queira mostrar que

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)),$$

ou seja, que a fórmula acima é um teorema do **CQC**. Você pode, claro, fazer uma dedução começando com o antecedente do condicional como hipótese etc. Contudo, as coisas ficam mais simples usando o TD.

Pelo TD, temos:

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)) \text{ sse}$$
$$A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C).$$

Outra aplicação do teorema nos diz que

$$A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C) \text{ sse } A \to (B \to C), B \vdash A \to C.$$

Finalmente, uma outra aplicação do TD nos dá:

$$A \to (B \to C), B \vdash A \to C \text{ sse } A \to (B \to C), B, A \vdash C.$$

Assim, para mostrar que $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ é um teorema, só precisamos fazer a dedução de C a partir das premissas $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, B, e A, e o problema está resolvido.

Não vou apresentar aqui uma prova do Teorema da Dedução, o que nos levaria muito além do escopo deste livro. O interessante a comentar a seu respeito é que, tendo uma dedução de β a partir de $\Gamma \cup \{\sigma\}$, a própria demonstração do teorema, além de garantir que há uma dedução de $\sigma \rightarrow \beta$ a partir de Γ, nos dá um algoritmo para construir essa dedução. Note que isso, em absoluto, significa que haja um algoritmo para a decidibilidade do **CQC**: você tem que encontrar a dedução de β a partir de $\Gamma \cup \{\sigma\}$ primeiro, e esse passo fundamental o TD não diz como fazer.

Note, ainda, que o Teorema da Dedução só pode ser usado se a fórmula a ser deduzida for um condicional. Se você quiser mostrar que $Pa \vee \neg Pa$ é um teorema, por exemplo, não será possível usar o TD, já que essa fórmula é uma disjunção.

Com isto, encerramos uma primeira apresentação geral do **CQC**. O que vem agora, nos capítulos que ainda restam, são alguns tópicos um pouco mais avançados: extensões da linguagem do **CQC**, a formalização de teorias em linguagens de primeira ordem, e um breve passeio pelas lógicas não-clássicas.

CAPÍTULO 16

IDENTIDADE E SÍMBOLOS FUNCIONAIS

Neste capítulo, vamos considerar duas maneiras de estender o **CQC**, acrescentando novos tipos de símbolos a sua linguagem. Vamos tratar primeiro da relação de identidade e, a seguir, veremos os símbolos funcionais.

16.1 Nota sobre parênteses

Antes de iniciar propriamente este capítulo, e para simplificar um pouco mais a notação no que vem a seguir, vamos fazer uma rápida consideração sobre o uso de parênteses. É relativamente fácil mostrar que os seguintes esquemas são (esquemas de) teoremas do **CQC**:

$$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma),$$
$$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma),$$
$$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma).$$

Ou seja, podemos mostrar que os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ são *associativos*. Isso significa que, se tivermos uma seqüência de fórmulas ligadas apenas por conjunções, ou por disjunções, ou equivalências, não vai importar muito onde os parênteses são colocados. $Pa \wedge (Qb \wedge Rac)$, por exemplo, é logicamente equivalente a $(Pa \wedge Qb) \wedge Rac$.

Esse fato nos sugere mais uma convenção para limitar o uso de parênteses: no caso de seqüências de fórmula ligadas por $\wedge$, ou por $\vee$, ou $\leftrightarrow$, podemos simplesmente eliminar os parênteses correspondentes a $\wedge$, $\vee$, ou $\leftrightarrow$. Assim, em vez de escrevermos

$$Pa \wedge ((Qb \wedge Rab) \wedge Sc),$$

por exemplo, podemos escrever simplesmente

$$Pa \wedge Qb \wedge Rab \wedge Sc.$$

E, em vez de escrevermos, digamos,

$$((Pa \vee Qb) \vee ((Pa \rightarrow Qb) \vee (Qb \rightarrow Pa))) \vee \exists x(Px \vee Qx),$$

escrevemos simplesmente

$$Pa \vee Qb \vee (Pa \rightarrow Qb) \vee (Qb \rightarrow Pa) \vee \exists x(Px \vee Qx).$$

É claro que, se não quisermos, não precisamos eliminar os parênteses como sugerido acima. Mas, de um modo geral, as coisas ficam mais simples se o fizermos, e é o que vai acontecer, de vez em quando, daqui para a frente.

Para finalizar, um aviso: esta nova regra para eliminar alguns parênteses *não* se aplica a seqüências de fórmulas ligadas por $\rightarrow$, já que a implicação *não é* associativa.

16.2 Identidade

16.2.1 Um novo símbolo lógico

Para início de conversa, considere as duas sentenças abaixo, as quais, suponhamos, você deve formalizar no **CQC**:

Diana é Ártemis. (1)

Sócrates não é Platão. (2)

Para transcrever corretamente essas sentenças para a linguagem do **CQC**, necessitamos de algum símbolo de predicado que nos permita afirmar, de dois indivíduos quaisquer supostamente diferentes,

que eles são, afinal, o mesmo indivíduo; por exemplo, que Diana e Ártemis são a mesma pessoa (ou a mesma figura mitológica, para ser mais exato). Note que afirmar (1) é diferente de dizer, por exemplo, que Diana é grega. Neste caso, 'x é grega' é uma propriedade, e estamos afirmando que Diana tem essa propriedade. Contrariamente a isso, não podemos dizer que 'x é Ártemis' seja uma propriedade que Diana tem, e escrever algo como Ad. O que ocorre é que temos dois nomes, 'Diana' e 'Ártemis', e, com a sentença 'Diana é Ártemis', queremos dizer que esses dois nomes se referem a um *mesmo* indivíduo. De modo semelhante, com (2), pretendemos dizer que Sócrates e Platão são indivíduos distintos.

O símbolo que vamos introduzir, para permitir a formalização de sentenças como estas acima, é o da relação binária de identidade, =, que, costumeiramente, é lido como 'é idêntico a', ou 'é igual a', ou 'é o mesmo que'. A sentença (1) poderia ser, então, formalizada da seguinte maneira:

$$=da.$$

Já a sentença (2), por sua vez, ficaria assim:

$$\neg{=}sp.$$

Entretanto, embora a identidade seja um predicado binário, = é, entre os símbolos de relação, um símbolo especial, sendo usualmente colocado entre os *símbolos lógicos* (diferentemente dos outros símbolos de predicado). Você se recorda de que, ao construir uma estrutura, associamos a cada símbolo de predicado binário uma relação binária qualquer baseada no universo da estrutura. Assim, nada proíbe que associemos a =, em uma estrutura, uma relação qualquer, como 'x é pai de y'. O símbolo =, contudo, tem uma *interpretação fixa*: ele denota, nas estruturas chamadas *normais*, a relação de identidade, i.e., aquela que relaciona todo indivíduo consigo mesmo, e com mais ninguém.

Com relação à gramática, uma vez que = é um símbolo de predicado binário, não precisamos fazer alteração nenhuma na definição de fórmula. Assim, se $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ são termos (i.e., constantes ou variáveis), $=\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$ é uma fórmula atômica. Contudo, o costume é colocar o símbolo = *entre* os termos. Ou seja, em vez de escrevermos, como seria

usual para predicados, $=da$ (isto é, primeiro o símbolo de predicado, e, à sua direita, os símbolos individuais), o costume é o de escrever $d = a$. Não há problema algum quanto a essa prática; basta convencionarmos algumas abreviações. Sejam $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ dois termos quaisquer: a fórmula

$$=\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$$

será abreviada por

$$(\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2),$$

ou mesmo

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2.$$

Além do mais, no caso de negações, como em $\neg{=}sp$ acima, podemos também usar a abreviação

$$(s \neq p),$$

ou ainda

$$s \neq p.$$

Com respeito às estruturas, a interpretação de =, como dissemos, está fixada com relação às estruturas normais: é sempre a relação de identidade. Ou seja: se $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ é uma estrutura, temos que

$$I(=) \;=\; \big\{\langle x, x\rangle \mid x \in A\big\}.$$

A extensão do **CQC** formada pela adição de =, usualmente chamada de 'cálculo de predicados com identidade', será denotada por **CQC**$^=$.

Além de permitir a formalização de sentenças como (1) e (2), o símbolo de identidade tem outros usos. Considere as sentenças abaixo, e suponha que eu lhe pedisse para formalizá-las.

Duendes existem. (3)

Sócrates existe. (4)

A sentença (3) acima não traz nenhum problema: você introduz um símbolo de propriedade D, representando 'x é um duende', e escreve $\exists xDx$. Note, contudo, que essa solução não pode ser aplicada

à sentença (4). Como vimos acima, ao falar de Diana — isto é, Ártemis —, seria muito estranho introduzir um símbolo de propriedade S representando 'x é Sócrates', e então escrever $\exists x Sx$. Claro que isso pode, formalmente, ser feito, mas não é lá muito intuitivo: 'Sócrates' é o *nome* de alguém, não uma *propriedade* que alguém pode ter.

Por outro lado, uma outra solução, como $\exists s$, obviamente não é permitida: as regras de formação, para começar, exigem que imediatamente após um símbolo de quantificador como $\exists$ ocorra alguma variável, e em seguida alguma fórmula onde esta variável ocorra. Introduzir uma nova regra de formação, permitindo coisas como $\exists s$, nos obrigaria a alterar bastante nossa leitura intuitiva de $\exists$, bem como a definição de verdade.

Uma terceira saída seria introduzir um símbolo de propriedade adicional, tal como E, para representar 'x existe'. Nesse caso, Es teria o significado que queremos: Sócrates existe. Contudo, isso constituiria, no mínimo, uma duplicação de esforços, uma vez que, na verdade, afirmar a existência já é função do quantificador existencial. De mais a mais, isso traria a implicação de que a existência é uma propriedade que indivíduos têm — ou podem deixar de ter, e a interpretação clássica do **CQC** não vê com bons olhos indivíduos que não existem, mas, de alguma forma, estão aí.[1]

Para resumir, a maneira de resolver esse problema, no **CQC**$^=$, consiste em usar o símbolo de identidade. Assim, (4) ficaria formalizada como

$$\exists x(x = s),$$

que afirma, simplesmente, que existe um indivíduo que é (idêntico a) Sócrates — isto é, Sócrates existe.

Bem, talvez você não goste dessa solução, e tente achar algum defeito nela, dizendo, por exemplo: "Na verdade, o que estamos afirmando com $\exists x(x = s)$ é que *existe ao menos um indivíduo que é Sócrates*; a semântica de $\exists$ (isto é, 'existe ao menos um') permitiria, em prin-

[1] Por outro lado, nas lógicas livres, em que podemos ter constantes que não denotam nenhum indivíduo, introduz-se um símbolo de propriedade adicional, E, para afirmar que certos indivíduos existem: Es, por exemplo, diria que Sócrates existe. Para Pégaso, teríamos $\neg Ep$ — ele não existe. Mas não nos ocuparemos aqui dessas lógicas.

cípio, que houvesse outros indivíduos idênticos a Sócrates, enquanto, ao afirmar que Sócrates existe, estamos falando, é claro, de um *único* indivíduo!".

Essa objeção que você (supostamente) aponta parece razoável. Mas lembre-se de que as constantes funcionam como *nomes*, e que nada impede que Sócrates tenha outro "nome", como 'o mestre de Platão'. Desse ponto de vista, uma fórmula como

$$m = s$$

diz apenas que m e s são nomes *do mesmo indivíduo*. Não há problema nenhum em afirmar, portanto, que

$$\exists x \exists y(x = s \wedge y = m \wedge x = y).$$

Isso não quer dizer que haja *dois* indivíduos *diferentes* que sejam Sócrates: diz apenas que há na linguagem mais de um nome para Sócrates.

Exercício 16.1 Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**$^{=}$, usando = sempre que necessário, e a notação sugerida:

(a) Alberto Caeiro é Fernando Pessoa. (a: Alberto Caeiro; f: Fernando Pessoa)

(b) Sócrates não é Aristóteles. (a: Aristóteles; s: Sócrates)

(c) Platão existe. (p: Platão)

(d) Sócrates e Platão existem. (s: Sócrates; p: Platão)

(e) Platão existe, mas não é um jogador de futebol. (J: x é um jogador de futebol)

(f) Se João é o Bandido da Luz Vermelha, então João é um criminoso. (b: o Bandido da Luz Vermelha; j: João; C: x é um criminoso)

(g) Ou a Estrela da Manhã é a Estrela da Tarde, ou os astrônomos babilônicos estavam enganados. (m: a Estrela da Manhã; t: a Estrela da Tarde; A: x é um astrônomo babilônico; E: x estava enganado)

(h) Existe algo.

(i) Existe alguém que não é Sócrates.

(j) Se Diana não é Ártemis, então existe alguém que não é Ártemis. (d: Diana; a: Ártemis)

(k) Todo objeto é idêntico a si mesmo. [O princípio de identidade. Ou, a relação de identidade é reflexiva]

(l) Se uma coisa é igual a uma segunda coisa, então esta é igual à primeira. [A relação de identidade é simétrica]

(m) Se uma coisa é igual a uma segunda, e esta a uma terceira, então a primeira é igual à terceira. [A relação de identidade é transitiva]

(n) Se Hegel é incompreensível, então existe um indivíduo idêntico a Hegel que é incompreensível. (*h*: Hegel; *I*: *x* é incompreensível)

(o) Se dois indivíduos quaisquer são idênticos, e um deles é um poeta, então o outro também é poeta. (*P*: *x* é um poeta)

(p) Se um indivíduo qualquer é poeta, e outro não, então eles não são idênticos.

16.2.2 Outros usos para a identidade

Suponhamos agora que você quisesse dizer que ninguém, além de Sócrates, é um filósofo (ou seja, que Sócrates é o único filósofo). A relação de identidade dá a você meios para isso. Temos então:

$$Fs \land \neg\exists x(x \neq s \land Fx).$$

Ou seja, Sócrates é um filósofo, e não existe ninguém, diferente de Sócrates, que seja filósofo. O que significa que Sócrates é o único filósofo que existe. Eis uma outra fórmula que diz a mesma coisa:

$$Fs \land \forall x(Fx \rightarrow x = s).$$

Isto é, Sócrates é filósofo, e qualquer um que seja filósofo é Sócrates.

Note que, em qualquer uma das versões acima (com quantificador existencial ou universal) tivemos que escrever explicitamente $Fs \land \ldots$ na fórmula. A razão disso é que estamos mesmo afirmando, em português, que Sócrates *é* um filósofo. Se fôssemos transcrever a sentença em questão apenas por

$$\forall x(Fx \rightarrow x = s),$$

não teríamos garantia alguma de que Sócrates é filósofo: estaríamos apenas dizendo, de qualquer x, que, *se* ele for filósofo, então é Sócrates. Mas é claro que podemos ter uma estrutura em que não haja filósofos — onde nem mesmo s seja um filósofo.

Uma outra maneira de resolver o problema, claro, sem usar explicitamente Fs na fórmula, é a seguinte:

$$\forall x(Fx \leftrightarrow x = s).$$

Isso garante que Sócrates é um filósofo, já que podemos mostrar, primeiro, que $s = s$. (Como veremos depois, $\forall x(x = x)$ é uma fórmula válida, da qual se segue, por E$\forall$, que $s = s$.) Tendo demonstrado $s = s$, basta usar E$\forall$ em $\forall x(Fx \leftrightarrow x = s)$, e depois BC e MP para concluir Fs. Ou seja, s tem a propriedade F; Sócrates é um filósofo.

O exemplo comentado acima, em que há um único indivíduo com uma certa propriedade, sugere um outro tratamento das *descrições definidas*. Você se recorda de que, ao ser introduzida a linguagem do **CQC**, vimos que as constantes individuais podem ser usadas tanto para representar nomes próprios, quanto para descrições definidas, isto é, expressões como 'o mestre de Platão' e 'o descobridor da América'. Eu havia mencionado, contudo, que mais tarde veríamos outras maneiras de representar descrições definidas. Uma delas envolve o uso do símbolo de identidade.

Comecemos com um exemplo:

O mestre de Platão bebeu cicuta. (5)

A maneira usual de representar isto seria empregar a constante m para 'o mestre de Platão', o símbolo de predicado C para 'x bebe cicuta', e ter como resultado a fórmula Cm. Uma alternativa, contudo, devida a Bertrand Russell,[2] consiste em eliminar a expressão 'o mestre de Platão' através de uma paráfrase.

Considere o seguinte: quando falamos sobre o mestre de Platão, o que queremos dizer é que há um único indivíduo que tem a propriedade de ser mestre de Platão (ou que está na relação 'ser mestre de' com Platão). Em outras palavras, há pelo menos um indivíduo, e no máximo um indivíduo com essa propriedade. Assim, se usarmos a constante p para Platão, e o símbolo de predicado M para a relação

[2] A análise proposta por Russell para as descrições definidas encontra-se em seu célebre artigo "Sobre a denotação", de 1905, cuja leitura eu recomendo (Russell, 1956).

'*x* é mestre de *y*', poderíamos simbolizar a sentença (5) da seguinte maneira:

$$\exists x(Mxp \wedge \neg\exists y(Myp \wedge x \neq y) \wedge Cx).$$

Ou então, com o quantificador universal:

$$\exists x(Mxp \wedge \forall y(Myp \rightarrow x = y) \wedge Cx).$$

Em português: há ao menos um indivíduo *x* que é mestre de Platão, qualquer indivíduo que também seja mestre de Platão é idêntico a *x*, e *x* bebeu cicuta.

O que fizemos com este exemplo foi uma paráfrase da sentença original, paráfrase na qual a descrição definida 'o mestre de Platão' não mais aparece.

Contudo, perguntaria você, esta não é uma maneira mais complicada de fazer as coisas? O que temos a ganhar com essa complicação adicional?

Esta é uma boa pergunta — felizmente eu tenho uma boa resposta. Considere os exemplos a seguir:

O círculo quadrado é um triângulo. (6)

O círculo quadrado não existe. (7)

A primeira dessas sentenças já é um pouco problemática dentro do **CQC**. É claro que podemos supor que, no nosso universo de discurso, existe um objeto que é um círculo quadrado, e usar, digamos, a constante *c* para falar desse objeto. O problema é que ele, sendo também um quadrado, acaba sendo um círculo que não é círculo, e é mas também não é um triângulo — uma contradição.

O problema com a sentença (7), contudo, é ainda pior. Digamos que usemos a constante *c* para representar o círculo quadrado. Aparentemente, a simbolização dessa sentença seria o seguinte:

$$\neg\exists x(c = x).$$

Contudo, é fácil ver que a fórmula acima é inválida: ela é falsa em toda e qualquer estrutura! Recorde que a semântica do **CQC**

exige que toda constante tenha uma denotação. Assim, se c representa algum indivíduo no universo, é automaticamente verdadeiro que $\exists x(c = x)$ — e automaticamente falso que $\neg\exists x(c = x)$.

A conseqüência parece ser a de que é contraditório afirmar que não existe o círculo quadrado. Em outras palavras, parece que não há como negar a existência do círculo quadrado sem cair em contradição. E isso se aplica a qualquer objeto: como negar a existência de Pégaso, se a fórmula $\neg\exists x(p = x)$ é automaticamente falsa? Significa isso então que existe, afinal, o círculo quadrado? Pégaso? Ou (o exemplo original de Russell) o atual rei da França? Este é um velho problema filosófico: parece que, para afirmar que algo não existe, temos que admitir que este algo existe, afinal.

A análise de Russell, por meio de uma paráfrase, permite que solucionemos este problema no que diz respeito a descrições definidas. Ao invés de empregar uma constante para representar a expressão 'o círculo quadrado', vamos simplesmente eliminá-la como vimos anteriormente. Usemos Q para o predicado 'x é um círculo quadrado', e T para 'x é um triângulo'. A sentença (6) seria formalizada assim:

$$\exists x(Qx \wedge \forall y(Qy \rightarrow x = y) \wedge Tx).$$

Essa, contudo, é uma sentença falsa, pois não existe algo que seja um círculo quadrado. De modo similar, teríamos o seguinte, ao formalizar (7):

$$\neg\exists x(Qx \wedge \forall y(Qy \rightarrow x = y)).$$

Que é, obviamente, uma sentença verdadeira. Assim, podemos sem problemas afirmar a não-existência de objetos aparentemente referidos por descrições definidas.[3]

Ainda um outro exemplo de como usar a identidade está na formalização de sentenças onde alguém é "o mais" de alguma classe. Por exemplo, uma sentença como

Claudia Schiffer é a mais bonita de todas as mulheres. (8)

[3]Note que ficamos ainda com o problema de como afirmar a não-existência de Pégaso — isto é, o problema de constantes que não denotam —, mas não vamos continuar essa discussão aqui. Você pode conferir a solução de Russell, ou ver ainda o igualmente célebre artigo de Quine, "Sobre o que há" (Quine, 1980).

Digamos que *c* denote Claudia Schiffer, e que tenhamos os símbolos de predicado *M* e *B*, representando, respectivamente, '*x* é uma mulher' e '*x* é mais bonita que *y*'. Uma solução seria:

$$Mc \wedge \forall x((Mx \wedge x \neq c) \to Bcx). \tag{9}$$

Isto é, Claudia Schiffer é uma mulher e é mais bonita que qualquer indivíduo que seja mulher *e que não seja Claudia Schiffer!* Note que esse último requisito é essencial. Se tivéssemos escrito apenas

$$Mc \wedge \forall x(Mx \to Bcx),$$

teríamos como conseqüência que Claudia Schiffer é mais bonita que ela mesma (o que não é verdade, nem mesmo para a dama em questão). Note ainda que uma sentença ligeiramente diferente, como

Claudia Schiffer é mais bonita que todas as mulheres, (10)

poderia ter uma outra formalização, além de (9), dependendo de como se interpreta o que a sentença pretende dizer. Ou seja:

$$\forall x(Mx \to Bcx). \tag{11}$$

No caso de (9), estamos afirmando que Claudia Schiffer é uma mulher, o que parece ser correto em virtude da afirmação de que ela é a mais bonita *de todas as* mulheres (fica implícito que ela é uma mulher, também). Contudo, isso não ocorre com (10): diz-se apenas que ela é mais bonita *que todas* as mulheres. A fórmula (11) reflete isso, parecendo dar a entender que ela não é mulher (seria talvez uma fada, ou algo assim), uma vez que, pela interpretação intuitiva de *B*, ninguém é mais bonita que si mesma. (Note, contudo, que, para derivar $\neg Mc$, precisamos colocar, explicitamente, essa premissa implícita de que ninguém é mais bonita que si mesma: $\forall x \neg Bxx$).

Para finalizar esta seção, uma última aplicação do símbolo de identidade: ele nos permite ter um certo controle sobre o número de indivíduos no universo de uma estrutura. Por exemplo, podemos afirmar não apenas que Sócrates existe, mas que *somente* Sócrates existe, o que pode ser feito como abaixo:

$$\exists x(x = s) \wedge \neg \exists x(x \neq s).$$

Ou, ainda, usando o quantificador universal,

$$\exists x(x = s) \wedge \forall x(x = s).$$

Como, entretanto, exige-se que o universo de uma estrutura tenha pelo menos um indivíduo, a fórmula acima é equivalente, na lógica clássica, a

$$\forall x(x = s).$$

Se "todos" são Sócrates, e se o universo tem ao menos um indivíduo, como deve ter, então esse indivíduo é Sócrates.

Para um outro exemplo, considere a fórmula abaixo:

$$\exists x \exists y(x \neq y).$$

O que ela está afirmando é que existem *dois indivíduos distintos*. Isto é, ela só será verdadeira em uma estrutura cujo universo tenha pelo menos dois indivíduos. Por outro lado, considere agora sua negação:

$$\neg\exists x \exists y(x \neq y).$$

Obviamente, essa fórmula só será verdadeira em uma estrutura cujo universo não contenha dois indivíduos distintos: ou seja, só há um indivíduo.

Na verdade, a fórmula acima, que é equivalente (via intercâmbio de quantificadores) a

$$\forall x \forall y(x = y),$$

afirma que há, *no máximo*, um indivíduo. Porém, como o universo de uma estrutura precisa conter *ao menos* um indivíduo, o resultado é que a fórmula acima só será verdadeira em uma estrutura que tenha *exatamente um* indivíduo em seu universo.

De modo similar, a fórmula a seguir exige que o universo de uma estrutura tenha, no máximo, dois indivíduos:

$$\neg\exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z).$$

O que é equivalente a

$$\forall x \forall y \forall z(x = y \vee y = z \vee x = z),$$

como é fácil de demonstrar. Agora, para ter uma fórmula que diga que há exatamente dois indivíduos no universo, basta fazer a conjunção da fórmula acima ("no máximo dois indivíduos") com $\exists x \exists y(x \neq y)$ ("no mínimo dois indivíduos"). Mais simples, porém, é a formulação seguinte:

$$\exists x \exists y(x \neq y \wedge \forall z(z = x \vee z = y)).$$

Evidentemente, se quisermos agora dizer que há exatamente dois indivíduos que tenham uma certa propriedade — digamos, há exatamente dois poetas — basta acrescentar isso à fórmula anterior:

$$\exists x \exists y(x \neq y \wedge \forall z(z = x \vee z = y) \wedge Px \wedge Py).$$

A técnica acima pode, é claro, ser generalizada para qualquer número natural n: 'há *pelo menos* (ou *no máximo*, ou *exatamente*) n indivíduos x tal que...'. Assim, você pode dizer, do seu universo, que há pelo menos 27 indivíduos, ou no máximo 648, ou, ainda, que há exatamente 333 jogadores de futebol nascidos em Rio das Antas.

Exercício 16.2 Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**$^=$, usando = sempre que necessário, e a notação sugerida:

(a) Somente Colombo descobriu a América. (a: a América; c: Colombo; D: x descobriu y)
(b) O descobridor da América era genovês. (G: x é genovês)
(c) Sócrates é o filósofo mais conhecido. (s: Sócrates; F: x é um filósofo; C: x é mais conhecido que y)
(d) O inventor da pólvora nasceu na China. (I: x inventou a pólvora; C: x nasceu na China)
(e) Existem exatamente dois indivíduos.
(f) Existem ao menos três indivíduos.
(g) Existem no máximo três indivíduos.
(h) Todas as crianças, exceto Pedrinho, gostam de sorvete. (p: Pedrinho; C: x é uma criança; G: x gosta de sorvete)
(i) Pelo menos duas crianças gostam de sorvete.
(j) Se existe exatamente um indivíduo, então Sócrates é Platão. (s: Sócrates; p: Platão)
(k) Todo filósofo tem ao menos dois discípulos. (F: x é um filósofo; D: x é discípulo de y)

(l) Ninguém que seja discípulo de Sócrates é Sócrates.

(m) Há um papagaio que é vermelho, e um outro que é azul. (P: x é um papagaio; R: x é vermelho; B: x é azul)

(n) Há exatamente dois papagaios vermelhos.

16.3 Símbolos funcionais

Nesta seção você vai ver uma outra maneira de estender o **CQC**, que consiste na adição de *símbolos funcionais* à linguagem, também chamados de *símbolos de operação*. Em princípio, tais símbolos não seriam absolutamente necessários, pois podemos passar sem eles. Contudo, por meio deles, certas coisas podem ser expressas de maneira mais simples, como veremos logo a seguir.

16.3.1 Alguns exemplos

Vamos, como de hábito, começar com um exemplo. Suponhamos que eu quisesse formalizar a sentença

Os pais de Pedro, Carlos e Denise são filósofos, (12)
e Pedro, Carlos e Denise também.

(Suponhamos ainda que se trate de três pais diferentes.) Uma primeira alternativa seria a seguinte: temos três indivíduos dos quais sabemos o nome — Pedro, Carlos e Denise — e precisamos de uma constante para cada um deles. Por exemplo, p, c e d. Dos outros três indivíduos, os pais, não sabemos o nome: sabemos apenas que são pais e filósofos. Usando P para a relação 'x é pai de y' e F para 'x é um filósofo', temos o seguinte:

$$\exists x(Pxp \wedge Fx) \wedge \exists x(Pxc \wedge Fx) \wedge \exists x(Pxd \wedge Fx) \wedge Fp \wedge Fc \wedge Fd.$$

Isto, como você vê, é algo bastante complicado (apesar de já termos retirado alguns parênteses!) — e poderia ser mais complicado ainda, se quiséssemos garantir que existe apenas um indivíduo que é o pai de Pedro. Neste caso, o primeiro elemento da conjunção acima, $\exists x(Pxp \wedge Fx)$, teria que ser:

$$\exists x(Pxp \wedge \forall y(Pyp \rightarrow x = y) \wedge Fx).$$

Ou seja, há um x que é pai de Pedro, e qualquer y que for pai de Pedro é idêntico a x, e x é um filósofo. Teríamos que fazer isso — eliminar a descrição definida — para cada um dos indivíduos envolvidos.

Uma outra alternativa, mais simples que a anterior, consiste em introduzir uma constante para designar cada um dos pais; digamos, p_1, p_2, e p_3 designando, respectivamente, o pai de Pedro, o de Carlos, e o de Denise. O resultado seria, então:

$$Fp_1 \wedge Fp_2 \wedge Fp_3 \wedge Fp \wedge Fc \wedge Fd.$$

Isto, embora mais simples, obviamente aumenta muito o número de constantes a utilizar. E uma desvantagem adicional é que há uma perda de informação: a ligação existente entre, por exemplo, Carlos e o pai de Carlos, fica escondida, pois nada indica que p_2 e c tenham algo a ver um com o outro.

Felizmente, há como resolver isso de um modo simples e elegante, por meio do recurso a um *símbolo funcional*. Símbolos funcionais são usados para representar funções, ou operações. Por exemplo, se estamos falando do universo de todos os seres humanos, a expressão

o pai de x

representa uma função que associa, a cada indivíduo x, um único indivíduo, o pai (biológico) de x. Se usarmos a letra f para representar essa função, a expressão 'o pai de Pedro' pode ser formalizada da seguinte maneira: $f(p)$. Como você vê, escrevemos o símbolo funcional, e colocamos seu *argumento* — Pedro, o indivíduo a quem estamos aplicando a função — entre parênteses. O resultado, $f(p)$, é um termo que se refere a um outro indivíduo: o pai de Pedro. Ou seja, podemos pensar numa função como uma expressão que, aplicada ao "nome" de um indivíduo, dá como resultado o "nome" de um outro indivíduo. Dessa forma, podemos falar do pai de Pedro sem precisar introduzir uma constante especial para ele. Assim, podemos dizer que o pai de Pedro é um filósofo escrevendo

$$Ff(p).$$

Voltando à sentença (12) acima, usando o símbolo funcional f, ficamos finalmente com a seguinte formalização:

$$Ff(p) \wedge Ff(c) \wedge Ff(d) \wedge Fp \wedge Fc \wedge Fd.$$

Você há de concordar que essa é uma maneira muito mais econômica e elegante de fazer as coisas, especialmente porque a conexão entre Pedro e seu pai, por exemplo, fica representada na linguagem. Contudo, devemos ter o cuidado, ao introduzir um símbolo funcional, de que ele, de fato, represente uma função no universo do qual estamos falando. Por exemplo, a expressão em português

o filho de x

obviamente não denota uma função, pois, se aplicada a um indivíduo que não tem filhos, ou que tem mais de um filho, ou não denotará um indivíduo, ou não denotará univocamente. Como você recorda, na lógica clássica fazemos a suposição de que toda constante denota um indivíduo — é o nome de um indivíduo — e o mesmo vale para termos construídos a partir de constantes usando símbolos funcionais. Se você diz que *o* filho de João é um estudante, deve haver alguém no universo — e apenas um indivíduo — a quem a expressão 'o filho de João' se refere.

A expressão 'o filho mais velho de x', claro, chega um pouco mais perto de ser uma função, mas apenas se estamos falando de um universo onde *todos* têm pelo menos um filho. Do mesmo modo, as expressões 'o pai de x' e 'a mãe de x', que denotam funções no universo de todos os seres humanos, não mais o fazem se o universo contiver coisas sem pai nem mãe, como mesas, cadeiras, gatos e $\sqrt{2}$. Não faz sentido falar de 'o pai de $\sqrt{2}$'. Assim, só podemos introduzir adequadamente símbolos funcionais se o universo de que pretendemos falar permitir isso.

Os exemplos dados até agora, como 'o pai de x', foram de uma *função unária*, isto é, uma função de um argumento. Mas é claro que, de modo similar aos predicados, que aparecem em qualquer grau imaginável (unários, binários, ternários etc.), podemos ter funções n-árias, para qualquer n que queiramos. Dois exemplos de função binária são

a soma de x e y,

o produto de x e y,

se estamos tratando, por exemplo, dos números naturais, isto é, do

conjunto $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Assim, se usarmos os símbolos s e p para, respectivamente, a soma e o produto de dois números naturais, podemos escrever coisas como

$$s(a,b) = c,$$

ou seja, a soma de a e b é c, ou então,

$$s(a,b) \neq p(a,b),$$

isto é, a soma de a e b é diferente do produto de a e b. (Note que, no caso de uma função de *mais de um* argumento, estes são escritos separados por vírgulas.)

Bem, você já conhece outros símbolos para as funções soma e produto: $+$ e $\times$. Assim, as duas sentenças anteriores poderiam ser abreviadas (colocando o símbolo funcional entre os argumentos, como fizemos com $=$ na seção anterior) da seguinte forma:

$$a+b=c,$$
$$a+b \neq a \times b.$$

Para dar agora mais um exemplo de como os símbolos funcionais facilitam as coisas, imagine que você tivesse que escrever a expressão matemática

$$\forall x \forall y(x+y=y+x)$$

dispondo apenas da relação ternária S para 'a soma de x e y é z'. Você teria que escrever algo como

$$\forall x \forall y \forall z \forall w((Sxyz \wedge Syxw) \rightarrow z=w).$$

Note que o uso de z e w é necessário para garantir que há apenas um número que corresponde à soma de x e y. A formulação mais fraca,

$$\forall x \forall y \forall z(Sxyz \rightarrow Syxz),$$

deixaria aberta a possibilidade de que houvesse um outro número, diferente de z, que também fosse a soma de x e y, o que o uso de funções automaticamente descarta, uma vez que, obviamente, só temos uma

única imagem da aplicação de uma função a um argumento (ou argumentos). Enfim, como mostra o exemplo acima, ainda que possamos dispensar o uso de símbolos funcionais, eles realmente simplificam certas coisas.

Para encerrar esses comentários iniciais com exemplos, lembre-se mais uma vez do cuidado que devemos ter ao trabalhar com funções. A operação aritmética usualmente representada por +, a soma, é sem dúvida uma função — mas isso se tomarmos como conjunto o universo dos números naturais, ou inteiros, ou reais. Mas suponhamos agora que nosso universo consista apenas nos números de 0 a 100: aí 'a soma de x e y' não designa mais uma função, pois a soma de, digamos, 45 e 85 é 130, que, obviamente, está fora do universo. Ou seja, não teríamos nenhum indivíduo designado pela expressão 'a soma de 45 e 85'. E, repito, na lógica clássica essa expressão precisa denotar algo, pois funciona como o nome de algum indivíduo. (Na verdade, existem lógicas que trabalham com funções parciais: por exemplo, num universo composto de seres humanos e cadeiras, a função 'o pai de x' seria restrita a uma parte do universo. Mas não vamos tratar dessas lógicas aqui.)

16.3.2 Redefinindo os termos

Após esses exemplos introdutórios, vamos agora ver como acrescentar símbolos funcionais à linguagem. Como você notou pelos exemplos acima, também vamos usar letras minúsculas. Não haverá perigo de confundir um símbolo funcional com uma constante, pois, se uma letra estiver representando uma função, deverá sempre ser escrita seguida de parênteses indicando o(s) argumento(s) dessa função, como em $f(c)$ ou $s(x,y)$.

Para formar a linguagem do $\mathbf{CQC}^{=}_{f}$ — o cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais — basta acrescentar à linguagem do $\mathbf{CQC}^{=}$ um suprimento infinito de símbolos funcionais: para cada $n > 0$, símbolos funcionais de grau n, para os quais usaremos também letras minúsculas $a,\ldots,t$, com ou sem subscritos. Duas observações a esse respeito: primeiro, alguns autores preferem reservar algumas letras para símbolos funcionais (como f e g), sendo as letras restantes as constantes individuais. Isso tem a vantagem de dispensar

os parênteses: se você escreve *fa*, e *f* é um símbolo só para funções, então, obviamente, *a* será seu argumento. Mas não vamos usar essa convenção aqui. Segundo, você notou que exigimos que $n > 0$. Ou seja, não teremos funções zero-árias. No entanto, se quisermos, podemos definir constantes individuais como funções zero-árias, o que alguns autores também fazem.

Tendo agora símbolos novos na linguagem, nossa definição de fórmula sofrerá alterações? Na verdade, não. O que vai mudar é a definição de *termo*: se antes termos eram apenas constantes individuais ou variáveis, agora teremos construções bem mais complexas. A definição é a seguinte:

Definição 16.1 *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem.*

(a) *Uma variável individual é um termo.*

(b) *Uma constante individual é um termo.*

(c) *Se* $\mathbf{f}$ *é um símbolo funcional n-ário, para* $n > 0$, *e* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ *são termos, então* $\mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ *é um termo.*

(d) *Nada mais é um termo, além do que for obtido por (a)–(c).*

A definição de fórmula, é claro, permanece a mesma. Uma fórmula atômica, por exemplo, continua sendo um símbolo de predicado *n*-ário seguido de *n* termos. Apenas alteramos a definição do que é um termo, passando a incluir mais coisas.

Vamos ver alguns exemplos de termos mais complexos. Suponha que estejamos falando do universo de todos os seres humanos, usando *a* para representar Aristóteles, e o símbolo *p* para a função 'o pai de *x*'. Assim, o termo $p(a)$ vai designar o pai de Aristóteles. Considere agora a expressão

$$p(p(a)).$$

A quem você acha que estamos nos referindo? Claro: ao pai do pai de Aristóteles, ou seja, ao *avô paterno* de Aristóteles. De modo similar, com $p(p(p(a)))$ estamos nos referindo ao bisavô paterno de Aristóteles. Veja a utilidade dos símbolos funcionais: eu não sei o nome do bisavô paterno de Aristóteles, mas, mesmo assim, posso falar dele. Se quisermos dizer que o bisavô paterno de Aristóteles é grego, nada mais simples do que escrever $Gp(p(p(a)))$.

Como você percebeu, um símbolo funcional aplicado a um termo (o nome de um indivíduo), gera um termo mais complexo (o nome de um outro indivíduo). E como fazer agora quando quisermos interpretar uma linguagem, isto é, construir uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$? Você recorda-se de que constantes designam um indivíduo no universo A da estrutura; e um símbolo de predicado n-ário, uma relação n-ária (contida em $A \times A$). Os símbolos funcionais são interpretados de modo análogo: se **f** é um símbolo funcional, a interpretação I vai associar a **f** uma função n-ária de A^n em A.

Vamos a um exemplo. Seja uma linguagem de primeira ordem em que tenhamos, entre outras coisas, um símbolo funcional unário f, e um símbolo funcional binário s. Seja agora a estrutura $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$. Suponha que queiramos interpretar f, nessa estrutura cujo universo são os números naturais, como a função 'o sucessor de x'. Ora, uma função unária pode ser representada por um conjunto de *pares* ordenados. Assim, teremos o seguinte:

$$I(f) = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \ldots\}.$$

Ou seja, $I(f)$ associa a 0 o número 1; a 1, o número 2; e assim por diante.

Consideremos agora s, e digamos que nossa idéia é que sua interpretação seja 'a soma de x e y' (i.e., $x+y$). Como temos uma função *binária*, a interpretação do símbolo s será um conjunto de *ternos* ordenados:

$$I(s) = \{\langle 0,0,0 \rangle, \langle 0,1,1 \rangle, \ldots, \langle 1,2,3 \rangle, \langle 2,2,4 \rangle, \ldots\}.$$

Isto é, aos números 0 e 0 a função $I(s)$ associa sua soma, que é zero; a 1 e 2, $I(s)$ associa sua soma, que é 3. E assim por diante.

Dessa forma, fica fácil determinar a que indivíduo um termo qualquer se refere. Se uma constante **c** qualquer se refere a um indivíduo $I(\mathbf{c})$ no universo do modelo, a denotação de um termo $\mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ qualquer será

$$I(\mathbf{f})(I(\mathbf{t}_1), \ldots, I(\mathbf{t}_n)).$$

Em outras palavras, o resultado de aplicar a função $I(\mathbf{f})$ à seqüência de indivíduos $I(\mathbf{t}_1), \ldots, I(\mathbf{t}_n)$.

Voltando ao exemplo acima, e supondo que nossa linguagem contém as constantes a_2 e a_4, cujos valores na interpretação I são, respectivamente, os números 2 e 4, teremos:

$$I(s(a_2,a_2)) = I(s)(I(a_2),I(a_4)) = I(s)(2,2) = 2+2 = 4.$$

Exercício 16.3 Usando p para 'o pai de x', m para 'a mãe de x', e para 'a esposa de x' e a para Aristóteles, diga a quem as expressões abaixo se referem:

(a)	$m(a)$	(d)	$m(m(a))$	(g)	$p(e(a))$
(b)	$p(m(a))$	(e)	$p(p(m(m(a))))$	(h)	$e(p(a))$
(c)	$m(p(a))$	(f)	$m(e(a))$	(i)	$m(m(e(a)))$

Exercício 16.4 Simbolize as sentenças abaixo, usando p para 'o pai de x', m para 'a mãe de x', e os símbolos de predicado sugeridos:

(a) O pai de Alexandre é um filósofo. (F: x é um filósofo)
(b) Felipe é o pai de Alexandre.
(c) Felipe não é a mãe de Alexandre.
(d) O pai de Carlos é também o pai de Denise.
(e) O avô paterno de Denise não é um filósofo.
(f) Alguém é o pai de Adão.
(g) Alguém é o pai de Carlos e de Denise.
(h) Se alguém é a mãe de Adão, então Adão não é o primeiro humano. (H: x é o primeiro humano)
(i) Se dois indivíduos têm a mesma mãe, então eles são irmãos. (I: x é irmão de y)
(j) Todos têm um pai.
(k) Todos têm mãe, mas nem todos têm filhos. (F: x é filho de y)
(l) A avó materna de Pedro mora em Ituporanga, mas seu avô materno não. (M: x mora em Ituporanga)
(m) Se dois indivíduos têm o mesmo pai e mesma mãe, então eles são irmãos. (I: x é irmão de y)
(n) Se Felipe é o pai de Alexandre, então Felipe não é a mãe de ninguém.
(o) Nenhum pai é mãe.
(p) Todos os avós paternos são pais.
(q) O pai de qualquer pessoa é filho de alguém. (F: x é filho de y)

Exercício 16.5 Idem, usando s para 'a soma de x e y', p para 'o produto de x e y', q para 'o quadrado de x', G para 'x é maior que y', L para 'x é menor que y', a para zero, e a_n para cada número natural $n > 0$:

(a) A soma de dois e dois é quatro.
(b) O produto de dois e dois é menor que cinco.
(c) O quadrado de cinco é vinte e cinco.
(d) A soma de dois números é menor que seu produto.
(e) Nem sempre o produto de dois números é maior do que sua soma.
(f) O produto de um número pela soma de dois outros é igual ao produto do primeiro pelo segundo somado ao produto do primeiro pelo terceiro.
(g) Zero é menor do que o produto de quaisquer dois números.
(h) Zero não é o quadrado de nenhum número.
(i) Se o quadrado de dois é quatro, e o de três é nove, então dois é menor que três.
(j) Dados dois números quaisquer, ou o primeiro é menor que o segundo, ou o segundo é menor que o primeiro, ou eles são iguais.

Exercício 16.6 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem contendo, entre outras coisas, o símbolo funcional unário q, e os símbolos funcionais binários s e p. Seja a estrutura $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$, e tal que a função I associa a a zero, a_n a cada número natural $n > 0$, e tal que:

$I(q) = \{\langle x, y\rangle \mid x^2 = y\}$
$I(s) = \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\}$
$I(p) = \{\langle x, y, z\rangle \mid x \times y = z\}$

Calcule o valor dos termos abaixo:

(a)	$q(a_2)$	(e)	$p(a_0, a_8)$
(b)	$s(a_1, a_3)$	(f)	$p(s(a_1, a_3), s(a_2, a_5))$
(c)	$p(a_2, a_5)$	(g)	$q(q(a_3))$
(d)	$s(a_2, q(a_3))$	(h)	$q(s(a_3, a_4))$

16.4 Conseqüência lógica no $\mathrm{CQC}_f^=$

Tendo visto como formalizar sentenças do português na linguagem do cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais, vamos ver agora como caracterizar a noção de conseqüência lógica nesse cálculo.

Começando pela noção de conseqüência semântica, verificamos que não há mudança alguma com respeito à definição apresentada para o **CQC** sem identidade e símbolos funcionais. Isto é, dado um conjunto Γ de fórmulas, e alguma fórmula α, dizemos que

$$\Gamma \vDash \alpha \quad \text{sse} \quad \text{todo modelo de } \Gamma \text{ é modelo de } \alpha.$$

É claro, o que mudou foi a caracterização do que é uma estrutura (lembre-se de que uma estrutura é modelo de um conjunto de fórmulas Γ se todas as fórmulas de Γ são verdadeiras nessa estrutura). Primeiro, estamos nos restringindo àquelas estruturas chamadas de *estruturas normais*; isto é, estruturas nas quais a interpretação do símbolo = é a relação de identidade no universo da estrutura. Segundo, temos que acrescentar, à definição de estrutura, uma cláusula indicando como interpretar os símbolos funcionais. Para deixar as coisas bem claras, vamos apresentar aqui a definição completa do que é uma estrutura para o $\mathbf{CQC}_f^=$.

Definição 16.2 *Uma estrutura $\mathfrak{A}$ para uma linguagem $\mathcal{L}$ de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais é um par ordenado $\langle A, I\rangle$, onde A é um conjunto não-vazio e contável, e I, a função interpretação, é tal como segue:*

(a) *a cada constante individual* **c** *de $\mathcal{L}$, I associa um indivíduo* $I(\mathbf{c}) \in A$;

(b) *a cada símbolo funcional n-ário* **f** *de $\mathcal{L}$, I associa uma função n-ária* $I(\mathbf{f})$ *de* A^n *em* A;

(c) *a cada símbolo de predicado zero-ário (letra sentencial)* **S**, *I associa um elemento do conjunto* $\{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$ *de valores de verdade (i.e.,* $I(\mathbf{S}) = \mathsf{V}$ *ou* $I(\mathbf{S}) = \mathsf{F}$);

(d) *ao símbolo de predicado binário =, I associa a relação de identidade em A (i.e.,* $I(=) = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$);

(e) *a cada símbolo de predicado n-ário ($n > 0$)* **P** *de $\mathcal{L}$ diferente de =, I associa uma relação n-ária em A (i.e.,* $I(\mathbf{P}) \subseteq A^n$).

Tendo assim caracterizado o que é uma estrutura para uma linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais, podemos definir quando uma fórmula qualquer α é verdadeira

em uma estrutura $\mathfrak{A}$. Primeiro, como você recorda, precisamos formar $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, isto é, acrescentar a $\mathcal{L}$ *nomes* para os indivíduos do universo A de $\mathfrak{A}$. E, claro, precisamos primeiro caracterizar, para cada termo **t** de $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, a que indivíduo **t** se refere, isto é, $I(\mathbf{t})$. Se **t** é uma constante, $I(\mathbf{t})$ é o indivíduo associado por I ao termo **t**. Se **t** é um nome, $I(\mathbf{t})$ é o indivíduo de quem **t** é nome. E se, para algum símbolo funcional **f** n-ário, $n > 0$, e para n termos $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$, o termo $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$, temos que

$$I(\mathbf{t}) = I(\mathbf{f})(I(\mathbf{t}_1),\ldots,I(\mathbf{t}_n)),$$

como vimos na seção anterior.

Isto posto, a única coisa a fazer é acrescentar à definição de verdade 10.2 a cláusula que fala da identidade, ou seja:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2) = \mathbf{V} \quad \text{sse} \quad I(\mathbf{t}_1) = I(\mathbf{t}_2),$$

onde $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ são dois termos quaisquer. Em outras palavras, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ é verdadeira em uma certa estrutura sse $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ se referem ao mesmo indivíduo.

Como você vê, feitas essas alterações nas definições de estrutura e verdade de uma fórmula em uma estrutura, nada mais é necessário. As noções de validade e conseqüência lógica semântica permanecem inalteradas.

16.5 Tablôs semânticos para o $\mathbf{CQC}_f^=$

Assim como a noção de conseqüência lógica (semântica) não sofreu alterações — bastando que modificássemos a definição de estrutura, as noções de prova por tablôs e conseqüência lógica por tablôs no $\mathbf{CQC}_f^=$ serão as mesmas que tínhamos antes. As diferenças, claro, estão nas regras utilizadas. Em primeiro lugar, como a identidade está sendo considerada um símbolo lógico, teremos que ter um par de regras para identidade, à semelhança de operadores e quantificadores. Depois, teremos que examinar que alterações serão necessárias nas regras das fórmulas gerais para tratar dos termos.

16.5.1 Regras para identidade

As regras para identidade são apresentadas na figura 16.1. Como de costume no caso de tablôs, para cada símbolo há duas regras: uma em que a fórmula em que esse símbolo é o principal aparece precedida de V, e outra em que aparece precedida de F. A primeira regra diz que, se em um ramo de um tablô ocorre uma expressão como $\mathbf{F\,t = t}$ (alternativamente, $\mathbf{V\,t \neq t}$), esse ramo do tablô fecha-se imediatamente. A razão disto é óbvia, pois, como estamos supondo que a relação de identidade vale para qualquer indivíduo, afirmar, sobre um certo **t**, que $\mathbf{t \neq t}$ seria contraditório.

Quanto à segunda regra, ela tem duas versões, mas a idéia básica é que, tendo uma fórmula verdadeira que assevere a identidade de dois termos quaisquer, ou seja, $\mathbf{V\,t_1 = t_2}$, ou $\mathbf{V\,t_2 = t_1}$,[4] e tendo alguma fórmula α onde $\mathbf{t_1}$ ocorre — não importa se essa fórmula seja precedida por V ou F (o que estamos representando na figura 16.1 pelo símbolo #) — você pode substituir *uma ou mais* ocorrências de $\mathbf{t_1}$ em α por ocorrências de $\mathbf{t_2}$. O valor # de α após a substituição é mantido: se era verdadeira, continua verdadeira; se falsa, continua falsa.

	onde # é V ou F:
$\mathbf{F\,t = t}$	$\#\ \alpha(\mathbf{t_1})$
$\times$	$\mathbf{V\,t_1 = t_2}$ ou $\mathbf{V\,t_2 = t_1}$
	$\#\ \alpha(\mathbf{t_1}/\mathbf{t_2})$

FIGURA 16.1 — Regras de tablô para identidade.

Um exemplo para começar. Vamos mostrar que $a = b \vDash Rab \rightarrow Rba$. O tablô fechado resultante é apresentado logo a seguir. Note que, na terceira linha do tablô, de cima para baixo, o que fizemos foi substituir, em $Rab \rightarrow Rba$, as ocorrências de b por a (gerando $Raa \rightarrow Raa$), já que temos, no ramo, $\mathsf{V}a = b$. O passo seguinte foi reduzir $\mathsf{F}Raa \rightarrow Raa$, obtendo imediatamente uma contradição.

[4]Recorde-se de que estamos trabalhando apenas com termos fechados.

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{V}\ a=b \\
\mathsf{F}\ Rab \to Rba \\
\checkmark \mathsf{F}\ Raa \to Raa \\
\mathsf{V}\ Raa \\
\mathsf{F}\ Raa \\
\times
\end{array}
$$

Um segundo exemplo: vamos mostrar que Pa, $Pb \nvDash a=b$. O tablô é o seguinte:

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{V}\ Pa \\
\mathsf{V}\ Pb \\
\mathsf{F}\ a=b \\
?
\end{array}
$$

Note que nada mais podemos fazer no caso acima. Como não temos uma identidade *verdadeira*, nenhuma substituição é possível. E, como as fórmulas envolvidas são atômicas, nada há que reduzir. O tablô fica aberto, e $a=b$ não é conseqüência lógica de Pa e Pb.

Exercício 16.7 Determine, usando tablôs, se as fórmulas abaixo são válidas, ou conseqüência lógica das premissas indicadas, conforme o caso.

(a) $\vDash \exists x(x=x)$

(b) $\neg Fa, Fb \vDash a \neq b$

(c) $\neg Pa, \neg Pb \vDash a=b$

(d) $\vDash \neg\forall x\forall y(x \neq y)$

(e) $\vDash \forall x\forall y(x \neq y \leftrightarrow y \neq x)$

(f) $\forall x(Fx \to Gx), \neg Fa \vDash \exists x(x \neq a)$

(g) $\exists x\exists y Rxy \vDash \exists x\exists y(Rxy \wedge x \neq y)$

(h) $\vDash \forall x\forall y((Gxy \wedge x=y) \to Gyx)$

(i) $\forall x(x=a \vee x=b) \vDash \forall y(y=c \to y=a \vee y=b)$

(j) $\neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b), \exists x Qx, \neg Qb \vDash Qa$

16.5.2 Alterações nas regras de quantificadores

Vamos tratar agora das mudanças necessárias pela introdução de símbolos funcionais. Não há regras especiais para eles, claro, como no caso da identidade, uma vez que não são símbolos lógicos. No

entanto, já que a definição de termo foi alterada, precisamos fazer pequenas mudanças em algumas regras que envolvem quantificadores. Por exemplo, você se lembra de que, a partir de uma fórmula universal verdadeira, podíamos, ao eliminar o quantificador, substituir a variável quantificada por uma constante qualquer. Bem, isso vai poder ser feito agora para um *termo* fechado qualquer.[5] Na figura 16.2, você encontra a nova formulação de duas das regras para fórmulas com quantificadores: universais verdadeiros e existenciais falsos. As outras duas permanecem como antes. E as regras para os operadores, claro, não sofrem alteração.

$\frac{\mathsf{V}\ \forall x\alpha}{\mathsf{V}\ \alpha[x/t]}$	$\frac{\mathsf{F}\ \forall x\alpha}{\mathsf{F}\ \alpha[x/c]}$	$\frac{\mathsf{V}\ \exists x\alpha}{\mathsf{V}\ \alpha[x/c]}$	$\frac{\mathsf{F}\ \exists x\alpha}{\mathsf{F}\ \alpha[x/t]}$
para qualquer termo fechado **t**	desde que **c** seja nova no ramo	desde que **c** seja nova no ramo	para qualquer termo fechado **t**

FIGURA 16.2 — Regras para fórmulas quantificadas.

É fácil ver por que, no caso de universais verdadeiros (e existenciais falsos), podemos trocar a variável por qualquer termo fechado **t**. Por exemplo, se temos uma fórmula como $\mathsf{V}\,\forall xPx$, isso significa que todos os indivíduos têm a propriedade P, inclusive $p(a)$ — digamos, o pai de Aristóteles.

Vamos mostrar, inicialmente, que a fórmula correspondente a 'se todos são filósofos, então o avô paterno de qualquer indivíduo é filósofo' (ou seja, $\forall xFx \rightarrow \forall xFp(p(x))$) é válida. O tablô fechado correspondente você encontra logo a seguir. Observe que, para obter a quarta linha do tablô, reduzimos a fórmula $\mathsf{F}\,\forall xFp(p(x))$ (que, como vínhamos fazendo, foi cancelada). E note que, nesse caso, apenas substituímos a variável x por uma *constante* nova a. Veja:

[5] Continuaremos a fazer a restrição de que não trabalharemos diretamente com fórmulas abertas — daí o fato de que os termos sejam fechados, i.e., não contenham variáveis. Daqui para a frente, a não ser que seja explicitado, 'termo' significa 'termo fechado'.

$$\checkmark \mathsf{F}\ \forall x Fx \rightarrow \forall x Fp(p(x))$$
$$\mathsf{V}\ \forall x Fx$$
$$\checkmark \mathsf{F}\ \forall x Fp(p(x))$$
$$\mathsf{F}\ Fp(p(a))$$
$$\mathsf{V}\ Fp(p(a))$$
$$\times$$

Agora, para obter a quinta linha, e fechar o tablô, o que fizemos foi utilizar $\mathsf{V}\forall xFx$. A nova versão da regra para um universal verdadeiro nos permite eliminar o quantificador e trocar a variável x por qualquer termo. No caso, substituímos a ocorrência de x em Fx por $p(p(a))$, ficando, então, com $\mathsf{V}Fp(p(a))$, e fechando o tablô. (Note que, se a regra não tivesse essa nova versão, não teria sido possível mostrar a validade da fórmula em questão.)

Vamos ver agora um exemplo da razão pela qual as regras de universais falsos e existenciais verdadeiros não foram modificadas. Considere a sentença 'se o pai de um indivíduo qualquer é filósofo, então todos são filósofos'. Formalizando, $\forall xFp(x) \rightarrow \forall xFx$. Obviamente isto não é válido, como mostra o tablô abaixo:

$$\checkmark \mathsf{F}\ \forall x Fp(x) \rightarrow \forall x Fx$$
$$\mathsf{V}\ \forall x Fp(x)$$
$$\checkmark \mathsf{F}\ \forall x Fx$$
$$\mathsf{F}\ Fa$$
$$\mathsf{V}\ Fp(a)$$
$$?$$

Esse tablô nunca vai fechar-se. Note que a única coisa que podemos fazer, ao processar o universal falso, é substituir x por uma constante nova. Se pudéssemos substituir x por um termo qualquer, como $p(a)$, então o tablô se fecharia — mas é claro que não queremos isso, pois estaríamos validando a fórmula em questão, que, intuitivamente, não pode ser válida. Essa é a razão pela qual ficamos restritos ao uso de constantes. A idéia — no caso de um existencial verdadeiro como $\exists xFx$, para mudar de exemplo — é que sabemos que, digamos, alguém é um filósofo. A razão de não se poder trocar x por um termo como $p(a)$ é que não sabemos, deste x que é filósofo, se ele é o pai de

alguém. Uma constante nova não faz nenhuma suposição adicional a respeito de um indivíduo — além de que ele existe.

Exercício 16.8 Determine, usando tablôs, se as fórmulas seguintes são válidas, ou conseqüência lógica das premissas indicadas, conforme o caso.

(a) $\forall xPx \to \forall xQx,\ \forall xPf(x) \vDash Qb$
(b) $\vDash \forall x\forall y(f(x) \neq f(y) \to x \neq y)$
(c) $\vDash \forall x\exists y(y = h(x))$
(d) $\forall xPf(x) \to \forall xQf(x),\ \neg\exists xQx \vDash \neg Pf(f(a))$
(e) $a = b \vDash Pf(a) \to Pf(b)$
(f) $\forall xPx \vDash \forall xPf(x)$
(g) $\vDash \forall x(\neg Ph(h(x)) \to \neg Ph(x))$
(h) $\exists x\exists y(x = f(y) \wedge y = h(x)) \vDash \exists x(x = f(h(x))$
(i) $Pa \vDash \forall x(\neg Ph(h(x)) \to \neg Ph(x))$
(j) $\forall xPx \vDash \forall y(Ryb \to Ph(y,b))$
(k) $\vDash \forall x\forall y(x = y \to f(x) = f(y))$
(l) $\forall xPx \vDash \forall y(Ryb \to Ph(y,b))$
(m) $\vDash \forall x\forall y\forall z\forall w((x = y \wedge z = w) \to g(x,z) = g(y,w))$
(n) $\vDash \forall z\exists x\exists y(z = h(x,y)) \to (\forall x\forall ySh(x,y) \to \forall ySy)$

16.6 Dedução natural no $CQC_f^=$

Como seria de esperar, a noção de conseqüência sintática também não sofrerá alterações. Ou seja, dado um conjunto de fórmulas Γ e uma fórmula α qualquer, ainda teremos que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se α puder ser derivada a partir de fórmulas em Γ através de um número finito de aplicações das regras de inferência do $CQC_f^=$. O que vai mudar, no caso da dedução natural, são as regras de que vamos dispor: primeiro, teremos que ter regras especiais para o caso da identidade; depois, teremos de ver que alterações são necessárias para tratar de fórmulas envolvendo símbolos funcionais.

16.6.1 Regras para identidade

Vamos começar pela identidade. Como = está sendo considerado um símbolo lógico — i.e., na mesma situação que operadores e

quantificadores —, precisamos de duas regras: uma que introduza e outra que elimine a identidade. Essas regras estão formuladas na figura 16.3. A regra de introdução, como você vê, tem um caráter especial: ela não tem premissas. Isto é, podemos introduzir, em qualquer linha de uma dedução, uma fórmula $\mathbf{t} = \mathbf{t}$. Quanto à regra de eliminação, ela tem duas versões, mas a idéia básica é que, tendo uma fórmula que assevere a identidade de dois termos fechados quaisquer, você pode substituir uma ou mais ocorrências de um deles por ocorrências do outro.

Introdução da Identidade (I=)	*Eliminação da Identidade* (E=)	
	$\alpha(\mathbf{t}_1)$	$\alpha(\mathbf{t}_1)$
———	$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$	$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1$
$\mathbf{t} = \mathbf{t}$	———	———
para qualquer termo fechado $\mathbf{t}$	$\alpha(\mathbf{t}_1/\mathbf{t}_2)$	$\alpha(\mathbf{t}_1/\mathbf{t}_2)$

FIGURA 16.3 — Regras para identidade.

Vamos ver um exemplo. Suponhamos que eu quisesse mostrar que $\vdash \forall x(x = x)$:

1.	$a = a$	I=
2.	$\forall x(x = x)$	1 I$\forall$

A fórmula $a = a$ na linha 1 foi introduzida por meio do uso da regra I=. Note que não precisamos de nenhuma premissa ou hipótese para fazer isso. Depois, claro, uma simples aplicação de I$\forall$ nos dá o resultado desejado.

Suponhamos agora que quiséssemos mostrar que $\vdash \neg\exists x(x \neq x)$. Vamos tentar mostrar isso por absurdo, ou seja, começamos com a hipótese $\exists x(x \neq x)$, e continuemos a partir daí. A solução seria:

1.	| $\exists x(x \neq x)$	H (RAA)	?CTR
2.	| | $a \neq a$	H (E$\exists$)	
3.	| | $a = a$	I=	
4.	| | $A \wedge \neg A$	2,3 CTR	
5.	| $A \wedge \neg A$	1, 2–4 E$\exists$	
6.	$\neg\exists x(x \neq x)$	1–5 RAA	

Lembre-se de que $a \neq a$ é na verdade uma abreviação de $\neg{=}aa$, de modo que o uso de CTR na linha 4 foi correto.

Vamos ver um terceiro exemplo, tentando mostrar que $Lab \vee Lbc$, $\neg Lab$, $b = c \vdash Lcc$. Uma solução seria:

1.	$Lab \vee Lbc$	P
2.	$\neg Lab$	P
3.	$b = c$	P
4.	Lbc	1,2 SD
5.	Lcc	3,4 E=

Um outro caminho possível é fazer a substituição de b por c não em Lbc, mas já na fórmula da linha 1, $Lab \vee Lbc$, obtendo $Lab \vee Lcc$.

Exercício 16.9 Demonstre:

(a) $\vdash \exists x(x = x)$

(b) $\neg Pa, Pb \vdash a \neq b$

(c) $a = b \vdash \exists x(x = a \wedge x = b)$

(d) $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

(e) $\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

(f) $\vdash \forall x \exists y(x = y)$

(g) $Lab, \neg Lcd, b = d \vdash a \neq c$

(h) $\forall x(x = a \vee x = b) \vdash \forall y(y = c \rightarrow (y = a \vee y = b))$

(i) $\neg \exists x(x \neq a \wedge x \neq b), \exists x Qx, \neg Qb \vdash Qa$

(j) $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Px \leftrightarrow Py))$

(k) $\vdash \forall x(Ax \leftrightarrow \exists y(x = y \wedge Ay))$

(l) $\vdash (\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx) \rightarrow \forall x \exists y(x \neq y \wedge Rxy)$

(m) $\vdash (Fa \wedge \forall x(x \neq a \rightarrow Fx)) \leftrightarrow \forall x Fx$

(n) $\vdash \exists x \forall y(x = y) \rightarrow (\forall x Fx \vee \forall x \neg Fx)$

(o) $\exists x(x \neq a \wedge Qx) \vdash \exists x Qx \wedge (Qa \rightarrow \exists x \exists y(x \neq y \wedge (Qy \wedge Qx)))$

16.6.2 Alterações em E∀ e I∃

Vamos tratar agora do caso dos símbolos funcionais. Como vimos ao falar de tablôs para o $\mathbf{CQC}_f^=$, não há regras especiais para eles — apenas pequenas mudanças em duas regras que envolvem quantificadores. Como no caso dos tablôs, em duas das regras poderemos substituir a variável de um quantificador eliminado por um *termo* qual-

quer. Na figura 16.4 você encontra a nova formulação de duas das regras para quantificadores: I∀ e E∃. As outras duas permanecem como antes, do mesmo modo como as regras para os operadores (que não vamos repetir aqui).

Eliminação do Universal (E∀)

$$\frac{\forall \mathbf{x} \alpha}{\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}$$

para qualquer termo fechado **t** substitutível por **x** em α

Introdução do Existencial (I∃)

$$\frac{\alpha(\mathbf{t})}{\exists \mathbf{x} \alpha(\mathbf{t}/\mathbf{x})}$$

para qualquer termo fechado **t**

Introdução do Universal (I∀)

$$\frac{\alpha(\mathbf{c})}{\forall \mathbf{x} \alpha[\mathbf{c}/\mathbf{x}]}$$

desde que a constante **c** não ocorra em premissa nem em hipótese vigente e seja substitutível por **x** em α

Eliminação do Existencial (E∃)

$$\frac{\exists \mathbf{x} \alpha \quad \begin{array}{|l} \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{c}] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}$$

desde que a constante **c** não ocorra em premissa nem em hipótese vigente nem em α, nem em β

FIGURA 16.4 — Regras para quantificadores.

Como você vê, as regras E∀ e I∃ envolvem agora a substituição de um termo qualquer, e não somente de constantes. Por outro lado, a formulação das regras I∀ e E∃ fica mantida como estava, ou seja, restrita a constantes.

Para ilustrar as razões das mudanças (ou não), vamos ver alguns exemplos. Inicialmente, vamos mostrar que $\vdash \forall x Pf(x) \rightarrow \forall x Pf(f(x))$:

1.	$\mid \forall x Pf(x)$	H (RPC)
2.	$\mid Pf(f(a))$	1 E∀
3.	$\mid \forall x Pf(f(x))$	2 I∀
4.	$\forall x Pf(x) \rightarrow \forall x Pf(f(x))$	1–3 RPC

A fórmula da linha 2 foi obtida substituindo-se a variável x em $Pf(x)$ por um termo qualquer, no caso, $f(a)$. A fórmula da linha 3, agora, foi obtida por I$\forall$ substituindo-se a *constante* a — que não ocorre em premissa nem em hipótese vigente — por uma variável, no caso, x, e quantificando-se universalmente essa variável. Com relação à figura 16.4, note que as regras I$\forall$ e E$\exists$ ficaram com a mesma formulação anterior. No caso de I$\forall$, não posso substituir um *termo* por uma variável. Assim, no exemplo em questão, seria totalmente errado escrever, na linha 3, digamos, $\forall xPx$, substituindo o termo $f(f(a))$ por x. Isso não funciona pela seguinte razão: enquanto a, não ocorrendo nem em premissa nem em hipótese vigente, representa um indivíduo *qualquer*, o mesmo não se pode dizer de $f(f(a))$. Se f representa a função 'o pai de x', então $f(f(a))$ é o *avô* de um indivíduo qualquer — e certas coisas podem ser verdadeiras para todo avô, sem que sejam verdadeiras para todos os indivíduos do universo. Por exemplo, P poderia estar representando a propriedade 'x tem ao menos um filho(a)'. Enquanto isso é trivialmente verdadeiro para um avô — todo avô tem que ter ao menos um filho ou filha —, não vale para todos os indivíduos do universo.

Por uma razão similar, ao usarmos E$\exists$, a hipótese deve introduzir uma constante nova, mas não um termo qualquer. Por exemplo, tendo uma fórmula como $\exists xFx$, podemos fazer a hipótese Fa, onde a, intuitivamente, é o nome do indivíduo que tem F. Mas não seria correto fazer a hipótese $Fp(a)$, pois não sabemos, a respeito do indivíduo que tem F, se ele é o pai de alguém, por exemplo. Assim, tanto a regra de I$\forall$, quanto a de E$\exists$, ficam da mesma maneira.

Vamos ver mais um exemplo de problemas que podem ocorrer se isso não for respeitado. Digamos que temos as premissas 'se o quadrado de um número inteiro é negativo, este número é azul', e 'algum número é negativo'. Obviamente, você não pode concluir que 'algum número é azul'. Digamos que o universo seja o conjunto dos inteiros, e que temos N representando 'x é negativo', A para 'x é azul', e o símbolo funcional q para 'o quadrado de x'. Então:

1.	$\forall x(Nq(x) \rightarrow Ax)$	P
2.	$\exists xNx$	P
3.	$\mid Nq(a)$	H (para E$\exists$???)

4.	$\mid Nq(a) \to Aa$	1 E$\forall$
5.	$\mid Aa$	3,4 MP
6.	$\mid \exists xAx$	5 I$\exists$
7.	$\exists xAx$	2, 3–6 E$\exists$ (ERRADO!)

Como você percebe, pudemos deduzir que algum número é azul — o que é, obviamente, falso na estrutura pretendida (lembre-se de que o universo são os números inteiros). O erro foi aplicar E$\exists$ partindo da hipótese inadequada da linha 3. Lembre-se: não é errado *fazer* a hipótese — você pode fazer qualquer hipótese que desejar — mas, se você não respeitar certas restrições, ela não poderá ser usada para E$\exists$. No caso, colocar um termo no lugar da variável, em vez de uma constante, trouxe problemas. Note que a dedução não poderia ser feita se tivéssemos uma hipótese como Na.

Exercício 16.10 Demonstre:

(a) $\forall xPx \vdash \forall xPf(x)$

(b) $\vdash \forall x\exists y(y = h(x))$

(c) $a = b \vdash Pf(a) \to Pf(b)$

(d) $\vdash \forall x\forall y(x = y \to f(x) = f(y))$

(e) $\vdash \forall x\forall y(f(x) \neq f(y) \to x \neq y)$

(f) $\vdash \forall x(\neg Ph(h(x)) \to \neg Ph(x))$

(g) $\exists x\exists y(x = f(y) \land y = h(x)) \vdash \exists x(x = f(h(x))$

(h) $\forall xPx \vdash \forall y(Ryb \to Ph(y, b))$

(i) $\vdash \forall x\forall y\forall z\forall w((x = y \land z = w) \to g(x, z) = g(y, w))$

(j) $\vdash \forall z\exists x\exists y(z = h(x, y)) \to (\forall x\forall ySh(x, y) \to \forall ySy)$

CAPÍTULO 17

TEORIAS FORMALIZADAS

Até agora, a tônica das aplicações sugeridas para o cálculo de predicados de primeira ordem (eventualmente com identidade e símbolos funcionais) dizia respeito à formalização e à análise de argumentos. Com efeito, como vimos, este foi, em primeiro lugar, o motivo principal que levou à criação e ao desenvolvimento da lógica. Mais tarde, outros tipos de motivação apareceram — por exemplo, com Frege e seu desejo de formalizar a noção de prova em matemática, o que levou ao surgimento do $\mathbf{CQC}^{=}_{f}$ mais ou menos como o conhecemos hoje. Entretanto, uma vez tendo linguagens formais como a do cálculo de predicados, e uma noção de conseqüência lógica bem definida com respeito a essas linguagens, ficou óbvio que se podia utilizar tais ferramentas para outras coisas — como representar o conhecimento que se tem a respeito de algum domínio de investigação. Neste capítulo, vamos nos ocupar desta outra aplicação da lógica, a *formalização de teorias*.

17.1 Conceitualizações

Como você se recorda da introdução que fizemos ao cálculo de predicados, o conhecimento que temos a respeito de algum domínio de estudo pode ser expresso por meio de sentenças que falam dos *indivíduos* que se supõe existirem nesse domínio, das *propriedades* que

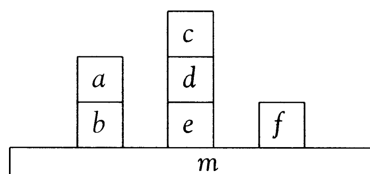


FIGURA 17.1 — Um mundo de blocos.

eles têm ou deixam de ter e de como eles se *inter-relacionam*. Seguindo Genesereth e Nilsson (1989), vamos chamar de *conceitualização* esse processo de delimitar um universo de discurso (isto é, dizer de que objetos ou indivíduos se pretende falar) e especificar que propriedades deles, e que relações entre eles, nos interessa estudar.

No capítulo 6, vimos um exemplo simples de conceitualização, envolvendo Miau, Tweety e um poleiro. Vamos examinar agora algo um pouco mais complexo, ainda que não muito: um mundo composto de blocos. Considere o universo representado, de uma forma muito esquemática, na figura 17.1. Esse universo consiste em seis blocos, a, b etc., colocados sobre uma mesa m. Assim, nosso universo do discurso — os objetos que supomos existir — é o conjunto

$$\{m, a, b, c, d, e, f\}.$$

Note que temos um nome para cada objeto, o que não precisa ser necessariamente o caso.

Definido o universo a investigar, o próximo passo consiste em precisar que propriedades desses objetos, e que relações entre eles, nos interessam. Por exemplo, é óbvio que, com exceção da mesa, todos os indivíduos restantes têm a propriedade de ser um bloco. Como você se recorda de nossa conversa sobre estruturas, muitos capítulos atrás, uma propriedade pode ser especificada por meio de sua extensão, isto é, do conjunto de indivíduos que a têm. No exemplo em pauta, a propriedade 'x é um bloco' corresponde ao conjunto

$$\{a, b, c, d, e, f\}.$$

Que mais pode interessar-nos, agora, com respeito a esse mundo de blocos? Uma coisa óbvia é que todo bloco deve estar sobre alguma

coisa, isto é, apoiado em alguma coisa, seja em um outro bloco, seja na mesa. Assim, uma relação interessante a estudar com respeito ao nosso pequeno mundo de blocos é a relação 'x está sobre y'. E, uma vez que uma relação binária pode ser especificada por meio de um conjunto de pares ordenados, temos

$$\{\langle a,b\rangle,\langle b,m\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,m\rangle,\langle f,m\rangle\}.$$

Uma outra relação, um pouco mais geral que a relação 'x está sobre y', é a relação 'x está acima de y', que vale se um bloco está acima do outro (ou da mesa) — ou diretamente sobre ele, ou sobre algum bloco que está acima dele. Temos então

$$\{\langle a,b\rangle,\langle a,m\rangle,\langle b,m\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,m\rangle,\langle d,e\rangle,\langle d,m\rangle,\langle e,m\rangle,\langle f,m\rangle\}.$$

E, como você pode facilmente verificar, a relação 'x está sobre y' é um caso particular da relação 'x está acima de y', pois todo par ordenado que pertence àquela relação pertence a essa última também.

Ainda uma outra propriedade que pode nos interessar, nesse mundo de blocos, é a propriedade 'x está livre'. Isso será útil se quisermos intervir no mundo de blocos, por exemplo, mudando os blocos de lugar, colocando um bloco sobre o outro, e assim por diante. Para um bloco, estar livre significa que não há um outro bloco sobre ele. A propriedade 'x está livre', com respeito ao mundo da figura 17.1, é especificada pelo conjunto

$$\{a,c,f,m\}.$$

Note que a mesa está sempre livre, ainda que haja blocos sobre ela. O que quer dizer que sempre poderemos pegar um bloco e colocá-lo sobre a mesa. Naturalmente, se tivermos uma conceitualização mais complexa, em que a mesa tenha um *tamanho* capaz de comportar apenas um certo número de blocos, então pode ocorrer que nem sempre a mesa esteja livre. (A propósito, alterar a configuração presente do mundo de blocos nos levaria a uma outra situação, em que, ainda que tivéssemos os mesmos indivíduos, suas propriedades e inter-relações já poderiam ser diferentes. O mundo representado na figura 17.1, claro, é *estático*.)

Para encerrar esse exemplo de uma conceitualização, é preciso lembrar-se de que, além de propriedades e relações, poderemos ter funções com respeito a esse mundo de blocos. Mais tarde, ao falarmos sobre aritmética, veremos alguns exemplos disso; por enquanto, vamos nos limitar a predicados.

Resumindo, uma conceitualização para o universo da figura 17.1 consiste nos indivíduos ali representados, e nos predicados 'x é um bloco', 'x está livre', 'x está sobre y' e 'x está acima de y'. Outras propriedades, que não incluímos aqui, mas que poderíamos, se nos interessassem, seriam, por exemplo, a cor que cada bloco tem, o seu peso etc.

Como podemos exprimir agora nosso conhecimento acerca de uma conceitualização como essa acima? Bem, uma vez que já temos indivíduos e predicados, precisamos apenas especificar uma linguagem de primeira ordem. Por exemplo, podemos usar o seguinte conjunto de símbolos não-lógicos para falar do mundo de blocos:

$$\{a, b, c, d, e, f, m, B, S, A, L\},$$

onde as constantes $a, \dots, m$, denotam os seis blocos e a mesa, respectivamente; B representa a propriedade 'x é um bloco'; S, a relação 'x está sobre y'; A, 'x está acima de y'; e L, 'x está livre'. Vamos denotar a linguagem acima por $\mathcal{L}_B$.

Note que, ao especificar $\mathcal{L}_B$, atribuímos informalmente a cada símbolo um significado: essa vai ser nossa interpretação desejada, e podemos fazê-la corresponder a uma estrutura. Assim, seja $\mathfrak{B} = \langle B, I \rangle$ uma estrutura, onde $B = \{a, b, c, d, e, f, m\}$, e tal que I é como segue:

$$\begin{array}{lll}
I(a) = a, & I(d) = d, & I(m) = m, \\
I(b) = b, & I(e) = e, & I(B) = \{a, b, c, d, e, f\}, \\
I(c) = c, & I(f) = f, & I(L) = \{a, c, f, m\},
\end{array}$$

$$I(S) = \big\{\langle a, b\rangle, \langle b, m\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, m\rangle, \langle f, m\rangle\big\},$$

$$I(A) = \big\{\langle a, b\rangle, \langle a, m\rangle, \langle b, m\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, m\rangle, \langle d, e\rangle, \langle d, m\rangle, \langle e, m\rangle, \langle f, m\rangle\big\}.$$

Coincidentemente, as constantes em $\mathcal{L}_B$ correspondem exatamente aos nomes que havíamos dado aos objetos do universo B (foi de propósito, claro).

Tendo agora a linguagem $\mathcal{L}_B$, podemos enfim representar por sentenças (i.e., fórmulas fechadas) suas nosso conhecimento acerca do mundo de blocos. Por exemplo, uma sentença como

$$Ba \wedge Sab$$

diz que a é um bloco, e está sobre b. Um outro exemplo:

$$\forall x(x \neq m \rightarrow Bx) \qquad (1)$$

diz que todos os objetos do universo — exceto a mesa — são blocos. Um fato adicional seria dizer que a mesa não é um bloco, o que poderíamos fazer com

$$\neg Bm.$$

Note que a fórmula acima *não* é uma conseqüência de (1): a fórmula (1) diz apenas que coisas que não são a mesa são blocos, mas deixa totalmente em aberto se a mesa é um bloco, ou não. Uma alternativa seria a fórmula seguinte, que diz tudo:

$$\forall x(x \neq m \leftrightarrow Bx).$$

Como você pode ver facilmente, $\neg Bm$ é uma conseqüência disso (tente demonstrar).

Exercício 17.1 Escreva, na linguagem $\mathcal{L}_B$, as fórmulas correspondentes às sentenças abaixo:

(a) b e c são blocos.
(b) O bloco c está sobre d, mas d não está sobre c.
(c) Se a está sobre b, então b não está sobre a.
(d) c está sobre a mesa, ou sobre algum bloco.
(e) Ou f ou c estão sobre d, mas não acontece de os dois estarem sobre d.
(f) Há ao menos um bloco que está sobre a mesa.
(g) Há ao menos um bloco que não está sobre a mesa.
(h) Todo bloco está acima da mesa.
(i) Nem todo bloco está sobre a mesa.
(j) a, c e f estão livres.
(k) Alguns blocos estão livres, e outros não.

17.2 Uma teoria sobre blocos

Como é fácil perceber, existem muitas sentenças que são verdadeiras a respeito do mundo da figura 17.1, e que representam nosso conhecimento a seu respeito (as do exercício anterior, por exemplo, são todas verdadeiras em $\mathfrak{B}$). Um desejo natural seria o de fazer uma lista de *todas* as sentenças de nossa linguagem $\mathcal{L}_B$ que são verdadeiras com relação a esse universo, e apenas essas. Entretanto, existem infinitas sentenças verdadeiras a respeito do mundo da figura 17.1, e é fácil ver por quê. Pegue duas sentenças verdadeiras quaisquer, tais como Ba e Bb, e forme a conjunção delas: você obtém uma nova sentença verdadeira. Faça agora a expansão dessa nova sentença com qualquer outra: você obtém ainda outra sentença verdadeira. E assim por diante. Além disso, todas as fórmulas válidas são verdadeiras em $\mathfrak{B}$, pois são verdadeiras em *qualquer* estrutura.

Resumindo, ainda que possamos escrever uma lista de todas as sentenças verdadeiras com relação ao mundo da figura 17.1, tal lista simplesmente não teria fim.

Qual é a solução para esse problema? Voltemos a Euclides e sua idéia do método axiomático. A idéia de *axiomatizar* o conhecimento sobre um certo domínio é encontrar um conjunto facilmente caracterizável de sentenças — pode ser finito, mas não necessariamente — do qual todo o resto se segue logicamente. Se isso for possível com relação ao nosso mundo de blocos, teremos uma *teoria axiomática* acerca da estrutura $\mathfrak{B}$.

Bem, vamos então falar um pouco sobre teorias e suas propriedades. Para nós, teorias aqui são *teorias formalizadas*, de que temos a seguinte definição:

Definição 17.1 *Uma teoria formalizada de primeira ordem T é um conjunto qualquer de sentenças de uma linguagem de primeira ordem.*

Essa definição, claro, é muito geral, e pode parecer estranha com relação a alguma idéia que você possa ter sobre o que deve ser uma teoria. Pela definição, *qualquer* conjunto de sentenças de nossa linguagem $\mathcal{L}_B$, como o abaixo, é uma teoria:

$$\{Ba, Sab\}.$$

As fórmulas acima dizem apenas que a é um bloco e está sobre b. Mas isso, com certeza, é muito pouco: há muito mais a dizer sobre o mundo de blocos da figura 17.1. Para dar outro exemplo, vamos chamar de T_B o conjunto de todas as sentenças de $\mathcal{L}_B$ verdadeiras em relação ao mundo de blocos da figura 17.1 — i.e., verdadeiras em $\mathfrak{B}$. Ou seja:

$$T_B = \{\sigma \text{ de } \mathcal{L}_B \mid \mathfrak{B}(\sigma) = \mathbf{V}\}.$$

Obviamente T_B é também uma teoria, e mais interessante do que $\{Ba, Sab\}$ acima, pois T_B inclui todas as sentenças verdadeiras em $\mathfrak{B}$ — exatamente o que estamos procurando. Mas é claro que isso não é suficiente, pois vamos precisar então de algum mecanismo que nos permita reconhecer quando uma sentença pertence a T_B, e quando não.

As fórmulas que pertencem a uma teoria T são chamadas de *axiomas* de T. Usualmente, faz-se uma distinção entre axiomas *lógicos* e *não-lógicos* de uma teoria. No nosso caso, como vamos utilizar dedução natural, não teremos axiomas lógicos (apenas regras de inferência). Assim, todas as fórmulas de uma teoria serão seus axiomas não-lógicos.

Onde T é uma teoria, vamos denotar por $Th(T)$ o conjunto de todas as sentenças que são conseqüência lógica de T. Isto é:

$$Th(T) = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}.$$

As sentenças que pertencem ao conjunto $Th(T)$, para alguma teoria T, são chamadas de *teoremas* de T.

Uma outra propriedade interessante que uma teoria pode ter é ser *fechada*, i.e., ser um conjunto fechado de fórmulas sob conseqüência lógica. Isso significa que, se alguma sentença σ pode ser deduzida de T, então $\sigma \in T$, ou seja, T já contém todas as sentenças que são conseqüência lógica de T. Dito de outra forma, T é fechada se $Th(T) = T$.

Dizemos que uma teoria T é *axiomática* se há um procedimento efetivo que caracterize seus axiomas. Em outras palavras, se, dada uma sentença σ qualquer na linguagem de T, podemos decidir, num número finito de passos, se σ é ou não um dos axiomas de T. Se T é um conjunto finito de fórmulas, como $\{Ba, Sab\}$ acima, T é imediatamente axiomática, pois basta comparar uma certa sentença com

as que estão em T para decidir se é um axioma de T ou não. Por exemplo, Ba é um axioma da teoria $\{Ba, Sab\}$, enquanto Bc não é.

Mesmo que T seja infinita, contudo, ela será axiomática se pudermos decidir se algo é ou não um axioma. A teoria abaixo é axiomática, ainda que os axiomas sejam apresentados semanticamente:

$$\{\alpha \mid \alpha \text{ é uma tautologia}\}.$$

Como há um procedimento efetivo (uma tabela de verdade) para decidir se algo é ou não tautologia, a teoria acima é axiomática. (Outras maneiras de apresentar um número infinito de axiomas é por meio do uso de *esquemas*, como veremos mais tarde.)

Voltando à teoria T_B que nos interessa (todas as sentenças verdadeiras em $\mathfrak{B}$), poderia parecer, à primeira vista, que ela não é axiomática, pois T_B inclui todas as fórmulas válidas do $\mathbf{CQC}_f^=$, e você se recorda de que o conjunto de fórmulas válidas é indecidível. Mas a questão aqui é diferente. É verdade que não temos como decidir, em geral, se alguma fórmula α é válida, ou seja, verdadeira *em toda e qualquer estrutura*. No caso de T_B, contudo, o que nos interessa é decidir se alguma fórmula é verdadeira ou não *na estrutura particular* $\mathfrak{B}$. E isso, creia, é possível. (Para dar um outro exemplo, o conjunto de todas as fórmulas de $\mathcal{L}_B$ — que obviamente inclui o conjunto das fórmulas válidas — é decidível, pois podemos sempre determinar se uma expressão é uma fórmula, ou não.)

Recorde-se de que o valor de verdade de uma fórmula qualquer, em uma estrutura, depende, no final das contas, do valor de verdade de certas fórmulas atômicas. Agora, o universo de $\mathfrak{B}$ é finito, e, mais ainda, sabemos quantos e quais indivíduos ele contém. Assim, podemos fazer uma lista completa de todas as fórmulas atômicas de $\mathcal{L}_B$, e dizer, de cada uma delas, se ela recebe **V** ou **F** na estrutura $\mathfrak{B}$. Em conseqüência, poderemos determinar, num número finito de passos, o valor de verdade de *qualquer* fórmula com relação à estrutura $\mathfrak{B}$. Assim, o conjunto T_B é decidível e, portanto, T_B é uma teoria axiomática.

Para dar um exemplo, considere a fórmula $\forall x Bx$. Como o universo de $\mathfrak{B}$ é finito, essa fórmula é equivalente à seguinte conjunção:

$$Ba \land Bb \land Bc \land Bd \land Be \land Bf \land Bm.$$

Como sabemos o valor de cada uma das fórmulas atômicas que aparecem acima, sabemos o valor de $\forall x Bx$. Como $\mathfrak{B}(Bm) = \mathbf{F}$, segue-se que $\mathfrak{B}(\forall x Bx) = \mathbf{F}$.

Os axiomas de T_B, contudo, foram caracterizados semanticamente. Será que poderíamos fazer isso também de uma maneira sintática — por exemplo, através de um conjunto, preferencialmente finito, de fórmulas, tais que todas as sentenças de T_B sejam conseqüência sintática dele? E, de mais a mais, embora possamos sempre especificar semanticamente alguma teoria, se tivermos um universo infinito, por exemplo, não teremos garantia de que o conjunto de fórmulas nele verdadeiras seja decidível. Ou seja, poderemos ter uma teoria T, especificada semanticamente, que não seja axiomática. (Como veremos depois, há muitos e muitos exemplos disso.) Assim, caso uma teoria T não seja axiomática, será que ela poderia ser mesmo assim *efetivamente axiomatizável*?

Definição 17.2 *Uma teoria T é efetivamente axiomatizável se existe alguma teoria axiomática T' tal que $Th(T') = Th(T)$.*

Isto é, T é axiomatizável se existe um conjunto de sentenças T' que é uma teoria axiomática cujas conseqüências são exatamente as mesmas de T. Neste caso, dizemos que T' é uma *axiomática* para T, ou que é uma *axiomatização* de T. Note que, sendo T' axiomática, o conjunto de seus axiomas é efetivamente caracterizável. Caso ainda T' seja uma axiomática finita de T, dizemos que T é *finitamente axiomatizável*.

Antes de tentarmos responder a questão sobre haver outra maneira de axiomatizar T_B, vamos ver mais algumas propriedades que as teorias podem ter. Uma teoria é dita *consistente* se, para toda fórmula α, não acontece que $T \vdash \alpha$ e $T \vdash \neg\alpha$. Uma teoria T é dita *completa* se, para toda sentença σ da linguagem de T, ou $T \vdash \sigma$, ou $T \vdash \neg\sigma$. Em outras palavras, ou σ é teorema de T, ou $\neg\sigma$ o é. Finalmente, uma teoria T é *decidível*, claro, se há um algoritmo que determine, para cada fórmula da linguagem de T, se ela é ou não teorema de T.

Note que, com relação à propriedade de completude definida acima, fizemos a restrição de que uma teoria T deduza uma sentença ou sua negação — mas isso não vale para fórmulas abertas em geral. Para

dar um exemplo, note primeiro que T_B é completa, pois é o conjunto de *todas* as sentenças verdadeiras em $\mathfrak{B}$. Em uma dada estrutura, uma sentença σ é verdadeira, ou, se falsa, então $\neg\sigma$ é verdadeira. Assim, tomemos a sentença $\forall xBx$: ou ela ou sua negação devem ser verdadeiras em $\mathfrak{B}$. Bem, como a mesa não é um bloco, $\forall xBx$ é falsa; logo, $\neg\forall xBx$ é verdadeira.

Considere agora a fórmula aberta Bx: ela será verdadeira em $\mathfrak{B}$ se e somente se seu fecho $\forall xBx$ o for. Como esta última fórmula é falsa, $\mathfrak{B}(Bx) = \mathbf{F}$. Significa isso que a negação de Bx é verdadeira? Claro que não. A negação de Bx é $\neg Bx$, e esta fórmula será verdadeira em $\mathfrak{B}$ se e somente se seu *fecho* $\forall x\neg Bx$ for verdadeiro em $\mathfrak{B}$. Mas essa última fórmula é falsa, pois não é verdade que nada é um bloco. Como você vê, no caso de fórmulas abertas, pode acontecer que tanto uma fórmula quanto sua negação sejam falsas numa estrutura. Por isso, ao definir completude de teorias, nos restringimos a sentenças.

Nossa questão, agora, com relação à teoria T_B (as sentenças verdadeiras no mundo da figura 17.1, i.e., na estrutura $\mathfrak{B}$), é se podemos encontrar uma teoria T' que seja uma axiomática finita de T_B. (Note que, como T_B é uma teoria completa, qualquer axiomática T' de T_B será também completa, já que as conseqüências lógicas de ambas devem ser as mesmas.)

Vamos começar nossa axiomatização fazendo uma distinção entre blocos e mesa, ou seja, dizendo que indivíduos do universo são blocos, e que a mesa, claro, não é um. Isso pode ser codificado pelo axioma A1 abaixo.

A1. $\forall x(x \neq m \leftrightarrow Bx)$

Podemos agora caraterizar quando algo está livre. Para isso precisamos de dois axiomas: a mesa está livre, e um bloco qualquer está livre se não há algo sobre ele. Assim:

A2. Lm

A3. $\forall x(Bx \rightarrow (Lx \leftrightarrow \neg\exists ySyx))$

A relação 'x está acima de y' pode também ser especificada pelo axioma abaixo, cujo significado é que x está acima de y, se ou está sobre y, ou existe um z tal que x está sobre z e z está acima de y.

A4. $\forall x \forall y (Axy \leftrightarrow (Sxy \vee \exists z (Sxz \wedge Azy)))$

Os axiomas A1–A4 acima, na verdade, se aplicam a uma teoria "geral" sobre mundos de blocos — nada afirmamos ainda que se restrinja apenas ao universo da figura 17.1. Precisamos, então, de alguns fatos específicos sobre esse universo; por exemplo, que blocos estão sobre que blocos, e quais estão livres. Podemos fazer isso com as duas conjunções abaixo:

A5. $Sab \wedge Sbm \wedge Scd \wedge Sde \wedge Sem \wedge Sfm$
A6. $La \wedge Lc \wedge Lf$

A partir disso, você pode provar muitas coisas sobre o mundo de blocos. Por exemplo, que o bloco b não está livre. (Note que isso não está explicitamente afirmado em nenhum dos nossos seis axiomas.) Primeiro precisamos provar, obviamente, que b é um bloco. O axioma A1 nos dá que

$$b \neq m \leftrightarrow Bb,$$

do que é fácil concluir que

$$b \neq m \rightarrow Bb.$$

Só precisamos agora da sentença $b \neq m$ para resolver nosso problema. Mas não é possível demonstrá-la neste momento: nossa axiomatização ainda deixa a desejar. Com efeito, nada garante que as duas constantes, b e m, não estejam referindo-se ao mesmo objeto. Não estão na estrutura $\mathfrak{B}$, mas esta, é claro, é apenas uma das estruturas possíveis.

No nosso caso há uma maneira simples de resolver o problema: basta fazer a hipótese de que nomes distintos se referem a indivíduos distintos. Poderíamos fazer isso por meio do axioma seguinte:

A7. $a \neq b \wedge a \neq c \wedge a \neq d \wedge a \neq e \wedge a \neq f \wedge a \neq m$
$\wedge b \neq c \wedge b \neq d \wedge b \neq e \wedge b \neq f \wedge b \neq m$
$\wedge c \neq d \wedge c \neq e \wedge c \neq f \wedge c \neq m$
$\wedge d \neq e \wedge d \neq f \wedge d \neq m$
$\wedge e \neq f \wedge e \neq m \wedge f \neq m$

Ou, claro, por meio de um conjunto de 21 axiomas, cada um deles correspondendo a um dos elementos da superconjunção acima, começando com $a \neq b$ e terminando com $f \neq m$. Mas há uma outra maneira, que é mais simples, e que consiste em usar um *esquema de axioma*. Recorde que, ao apresentarmos as constantes individuais, no capítulo 6 dissemos que elas tinham uma ordem canônica, a saber:

$$a, b, c, \ldots t, a_1, b_1, \ldots, t_1, a_2, \ldots$$

Isso significa que cada constante tem um *número de ordem* nessa lista: a é a primeira, b é a segunda etc. Vamos representar por $\rho(\mathbf{c})$ o número de ordem de uma constante $\mathbf{c}$ qualquer. Assim, $\rho(a) = 1$, $\rho(c) = 3$, $\rho(a_1) = 21$ etc. Feito isso, podemos introduzir, em lugar do axioma A7, o seguinte esquema, que vamos chamar de AS7:

AS7. $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_2$, se $\rho(\mathbf{c}_1) \neq \rho(\mathbf{c}_2)$.

Isso nos permite facilmente obter qualquer um dos elementos de A7, quando precisarmos dele. Por exemplo, como $\rho(b) = 2$, e $\rho(m) = 12$, uma instância (i.e., um caso particular) de AS7 é $b \neq m$, que é o que desejamos. Assim, poderíamos tranqüilamente acrescentar à nossa demonstração de que b está livre a linha

$$b \neq m,$$

e MP, agora, nos dá imediatamente Bb. A partir daí, usamos o axioma A3, e, substituindo x por b, temos

$$Bb \rightarrow (Lb \leftrightarrow \neg\exists y Syb).$$

Usando MP e o fato de que b é bloco, temos

$$Lb \leftrightarrow \neg\exists y Syb,$$

e uma aplicação de BC nos deixa com

$$Lb \rightarrow \neg\exists y Syb.$$

Temos agora que Sab, do nosso conjunto de fatos expresso no axioma A5. Uma introdução de existencial nos deixa com

$$\exists y Syb,$$

e DN nos leva a

$$\neg\neg\exists y Syb.$$

Finalmente, por MT, temos que $\neg Lb$, ou seja, b não está livre.

A seguir está resumida a demonstração anterior, seguindo nossas normas de dedução natural.

1.	$\forall x(x \neq m \leftrightarrow Bx)$	A1
2.	$b \neq m \leftrightarrow Bb$	1 E$\forall$
3.	$b \neq m \rightarrow Bb$	2 BC
4.	$b \neq m$	AS7
5.	Bb	3,4 MP
6.	$\forall x(Bx \rightarrow (Lx \leftrightarrow \neg\exists y Syx))$	A3
7.	$Bb \rightarrow (Lb \leftrightarrow \neg\exists y Syb)$	6 E$\forall$
8.	$Lb \leftrightarrow \neg\exists y Syb$	5,7 MP
9.	$Lb \rightarrow \neg\exists y Syb$	8 BC
10.	$Sab \wedge Sbm \wedge Scd \wedge Sde \wedge Sem \wedge Sfm$	A5
11.	Sab	10 S
12.	$\exists y Syb$	11 I$\exists$
13.	$\neg\neg\exists y Syb$	12 DN
14.	$\neg Lb$	9,13 MT

Mas deve estar óbvio para você que nossa axiomatização de T_B ainda não está completa. Por exemplo, suponha que queiramos demonstrar que a não está sobre c: isso é verdade, já que a está sobre b. Contudo, não é possível derivar $\neg Sac$ de A1–AS7 acima. (Tente!) Precisamos de mais um axioma: se x está sobre y, não existe z diferente de y tal que x esteja sobre z. Assim:

A8. $\forall x \forall y(Sxy \rightarrow \neg\exists z(Sxz \wedge z \neq y))$

Analogamente, se x está sobre y, não pode existir um z diferente de x que também esteja sobre y.

A9. $\forall x \forall y(Sxy \rightarrow \neg\exists z(Szy \wedge z \neq x))$

Isso deve resolver o nosso problema. Agora podemos demonstrar que a não está sobre c.

1.	$Sab \wedge Sbm \wedge Scd \wedge Sde \wedge Sem \wedge Sfm$	A5
2.	Sab	1 S
3.	$\forall x \forall y(Sxy \rightarrow \neg\exists z(Sxz \wedge z \neq y))$	A8
4.	$\forall y(Say \rightarrow \neg\exists z(Saz \wedge z \neq y))$	3 E$\forall$
5.	$Sab \rightarrow \neg\exists z(Saz \wedge z \neq b)$	4 E$\forall$
6.	$\neg\exists z(Saz \wedge z \neq b)$	2,5 MP
7.	$\forall z \neg(Saz \wedge z \neq b)$	6 IQ
8.	$\neg(Sac \wedge c \neq b)$	7 E$\forall$
9.	$\neg Sac \vee \neg(c \neq b)$	8 DM
10.	$c \neq b$	AS7
11.	$\neg\neg(c \neq b)$	10 DN
12.	$\neg Sac$	8,11 SD

A questão de encontrar uma axiomática consistente e completa para o conjunto de certa estrutura nem sempre é fácil. Por exemplo, será que o conjunto de axiomas A1–A9 acima é uma axiomática completa para T_B? Não vamos demonstrar isso aqui, mas recorde-se de que, tendo um universo finito, podemos ter uma lista de todas as sentenças atômicas de $\mathcal{L}_B$, dizendo se são verdadeiras ou falsas. Agora, observe que podemos deduzir de A1–A9 todas as sentenças atômicas verdadeiras em $\mathfrak{B}$, e a negação de todas as sentenças atômicas falsas. Isso deve ser suficiente para deduzir todas as sentenças de T_B. Claro, depois precisaríamos demonstrar que A1–A9 deduzem *apenas* as sentenças de T_B. Como T_B é completa, isso significa demonstrar que nosso conjunto A1–A9 de axiomas é consistente. Podemos fazer isso semanticamente, mostrando que os axiomas são verdadeiros em $\mathfrak{B}$ — o que pode ser feito sem problema, já que o universo é finito. Obviamente, então as conseqüências de A1–A9 também serão verdadeiras, e como uma contradição é falsa, não será conseqüência desses axiomas. De onde se conclui que o conjunto A1–A9 é consistente.

Uma última propriedade que vale a pena mencionar a respeito de um conjunto de axiomas é a *independência*. Dizemos que os axiomas de uma teoria T são *independentes* se nenhum deles pode ser deduzido dos restantes. Ou seja, para qualquer sentença σ que seja axioma de T, $T - \{\sigma\} \nvdash \sigma$. A motivação por trás do conceito de independência dos axiomas, naturalmente, é a de evitar axiomas supérfluos.

Exercício 17.2 Demonstre as seguintes sentenças da teoria de blocos:

(a) *c* está acima de *e*.
(b) Algum bloco está sobre a mesa.
(c) Algum bloco está acima da mesa.
(d) Todo bloco está sobre alguma coisa.
(e) Se dois blocos estão sobre um terceiro, eles são o mesmo.
(f) Se um bloco está acima de outro, este último não está livre.
(g) Todo bloco está acima da mesa.
(h) Nem todo bloco está sobre a mesa.
(i) Não há nenhum bloco tal que *a* esteja sobre ele, e ele esteja sobre *b*.

Exercício 17.3 Mostre que a teoria abaixo é inconsistente:

$$\{\forall x((Ax \vee Bx) \to \exists y Rxy), Ac \wedge \forall x \neg Rax\}$$

17.3 Aritmética formalizada

17.3.1 A teoria *N*

Vamos agora examinar uma teoria bastante conhecida, aquela que procura formalizar a aritmética dos números naturais. Na interpretação pretendida da teoria, o universo do discurso serão os números naturais, isto é, o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. A linguagem será constituída de um símbolo constante, 0, de símbolos para as funções binárias soma e produto, e para a função unária sucessor, e de um símbolo para a relação menor que. Ou seja, a linguagem de nossa teoria *N*, que chamaremos de $\mathcal{L}_N$, é a seguinte:

$$\mathcal{L}_N = \{0, s, +, \times, <\}.$$

Note que, para as funções soma e produto, estamos usando os símbolos familiares + e ×, em vez de letras minúsculas, como viemos fazendo até agora. (Podemos, claro, introduzir letras para representar essas funções, e usar + e × como *abreviações*.) Similarmente, vamos usar < para a relação '*x* é menor que *y*'. Chamaremos de $\mathfrak{N}$ a estrutura cujo universo são os números naturais, e onde os símbolos de $\mathcal{L}_N$ têm a interpretação que acabamos de indicar.

Na interpretação pretendida, a constante 0 denota o número zero. Os outros números podem ser obtidos aplicando-se a 0 a função sucessor. Assim, 1 é $s(0)$, 2 é $s(s(0))$, 3 é $s(s(s(0)))$, e assim por diante. Para simplificar, vamos eliminar os parênteses que vêm após o símbolo funcional s, quando o termo entre parênteses iniciar com s. Dessa forma, em vez de escrevermos $s(s(s(s(0))))$, vamos escrever simplesmente $ssss0$ — que é como representamos o número 4 em N.

As motivações para formalizar uma teoria da aritmética devem ser óbvias: temos uma estrutura, cujo universo é o conjunto dos números naturais, e uma série de sentenças verdadeiras a respeito dela. Obviamente, o número dessas sentenças verdadeiras é infinito, e gostaríamos de uma axiomatização, já que uma lista infinita, como vimos anteriormente, não é possível. Historicamente, quem primeiro apresentou uma axiomática para a aritmética dos naturais foi o italiano Giuseppe Peano, no século XIX, ainda que ele não tivesse feito isso em uma linguagem de primeira ordem (que só então estava sendo desenvolvida por Frege). É verdade que, antes de Peano, Richard Dedekind (1888) já havia apresentado uma construção axiomática dos números naturais usando a teoria de conjuntos; mas Peano, que conhecia o trabalho de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, estava mais interessado em apresentar seus axiomas em uma linguagem formal (cf. Ebbinghaus et al., 1988).

Nossa teoria axiomática, que denotaremos por N, é formada, para iniciar, pelo seguinte conjunto de axiomas:

N1. $\forall x(sx \neq x)$
N2. $\forall x \forall y(sx = sy \rightarrow x = y)$
N3. $\forall x(x + 0 = x)$
N4. $\forall x \forall y(x + sy = s(x + y))$
N5. $\forall x(x \times 0 = 0)$
N6. $\forall x \forall y(x \times sy = (x \times y) + x)$
N7. $\forall x \neg(x < 0)$
N8. $\forall x \forall y(x < sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$
N9. $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$

Alguns comentários sobre esses axiomas. O primeiro diz que nenhum número é o seu próprio sucessor, enquanto o segundo garante

que, se os sucessores de dois números são idênticos, então os números são, na verdade, o mesmo. Ou seja, nenhum número pode ser o sucessor de dois outros números. Note que a implicação em N2 vale na outra direção, isto é,

$$\forall x \forall y(x = y \rightarrow sx = sy).$$

Contudo, não precisamos incluir isso entre os axiomas, pois já é um teorema do $\mathbf{CQC}_f^=$. (Demonstre!)

Os axiomas N3 e N4 especificam algumas das propriedades básicas da adição (mas nem todas, como veremos depois). Em N3, temos que a soma de qualquer número com zero resulta no próprio número. N4 afirma que, se somarmos algum número x com o sucessor de algum y, o resultado será o sucessor da soma de x e y. Por exemplo, somando 3 com o sucessor de 4 (i.e., 5), devemos obter 8 — que, claro, é o sucessor de $3+4$.

Os axiomas N5 e N6 especificam algumas das propriedades básicas da multiplicação (mas, igualmente, nem todas). Em N5, o análogo de N3, afirma-se o que acontece se multiplicarmos algum número por zero: o resultado é zero. N6, similarmente a N4, trata da multiplicação de um número pelo sucessor de outro. Para exemplificar, o produto de 3 pelo sucessor de 4 (que é 5), deve ser a mesma coisa que multiplicar 3 por 4 e acrescentar 3. Assim:

$$\begin{gathered} 3 \times s4 = (3 \times 4) + 3, \\ 3 \times 5 = 12 + 3, \\ 15 = 15. \end{gathered}$$

Finalmente, o axioma N7 afirma que nenhum número é menor que 0, e, junto com N8 e N9, define as características da relação 'x é menor que y'.

De posse desses axiomas, podemos demonstrar alguns teoremas de N. Por exemplo, vamos mostrar que $\vdash_N 2 + 1 = 3$. Representando isso por meio da notação com a função sucessor, teremos que mostrar, na verdade, que $\vdash_N ss0 + s0 = sss0$. A prova é como segue:

1. $\forall x \forall y(x + sy = s(x + y))$ N4
2. $\forall y(ss0 + sy = s(ss0 + y))$ 1 E$\forall$ [$x/ss0$]

3.	$ss0+s0=s(ss0+0)$	2 E∀ [y/0]
4.	$\forall x(x+0=x)$	N3
5.	$ss0+0=ss0$	4 E∀ [x/ss0]
6.	$ss0+s0=sss0$	3,5 E=

Vamos por passos. Na linha 1 escrevemos simplesmente o axioma N4. (Se você quiser, um axioma é como uma premissa em uma dedução, podendo ser inserido em qualquer linha dela.) Dois usos de eliminação do universal nos deixaram com a fórmula na linha 3. Na linha 4, outra vez um axioma, e um uso de E∀ nos deixou com a linha 5. O truque agora, para obter a linha 6, foi o uso de eliminação de identidade. A fórmula da linha 5 diz que a expressão $ss0+0$ é idêntica a $ss0$. O que fizemos foi pegar a fórmula da linha 3, $ss0+s0=s(ss0+0)$, e substituir a ocorrência de $ss0+0$ por $ss0$. Isso resulta em $ss0+s0=s(ss0)$ e, de acordo com nossa convenção de eliminar os parênteses da função sucessor, $s(ss0)$ é a mesma coisa que $sss0$. Assim, ficamos na linha 6 com $ss0+s0=sss0$, ou seja, $2+1=3$, que é o que desejávamos.

Vamos a mais um exemplo: $\vdash_N 1+2=2+1$, ou seja, $\vdash_N s0+ss0=ss0+s0$. A prova é:

1.	$\forall x\forall y(x+sy=s(x+y))$	N4
2.	$\forall y(s0+sy=s(s0+y))$	1 E∀ [x/s0]
3.	$s0+ss0=s(s0+s0)$	2 E∀ [y/s0]
4.	$s0+s0=s(s0+0)$	2 E∀ [y/0]
5.	$\forall x(x+0=x)$	N3
6.	$s0+0=s0$	5 E∀ [x/s0]
7.	$s0+s0=ss0$	4,6 E=
8.	$s0+ss0=sss0$	3,7 E=
9.	$ss0+s0=sss0$	Teorema
10.	$s0+ss0=ss0+s0$	8,9 E=

Após introduzir o axioma N4 na linha 1, duas aplicações de E∀ nos deixam com a linha 3. Uma outra aplicação de E∀ à fórmula da linha 2, substituindo agora y por 0, nos deixou com a linha 4. A seguir, usamos a mesma estratégia da prova anterior para mostrar que $s0+0=s0$ (linha 6), e substituímos $s0+0$ na fórmula da linha 4, gerando $s0+s0=ss0$. De forma similar, substituímos $s0+s0$ por $ss0$ na

fórmula da linha 3, gerando então $s0+ss0=sss0$ (ou seja, $1+2=3$) na linha 8. Como já havíamos demonstrado que $2+1=3$, isto é, $ss0+s0=sss0$ (teorema anterior), acrescentamos isso à nossa dedução, na linha 9. (Assim como podemos introduzir um axioma em qualquer linha de uma dedução, podemos também introduzir um teorema já demonstrado a qualquer ponto.) Finalmente, uma última aplicação de eliminação da identidade nos deixa com a linha 10, como queríamos.

Finalmente, um exemplo envolvendo <. Vamos mostrar que $0<1$, ou seja, que $\vdash_N 0<s0$.

1.	$\forall x \neg(x<0)$	N7
2.	$\neg(s0<0)$	1 E∀ [x/s0]
3.	$\forall x(sx \neq 0)$	N1
4.	$s0 \neq 0$	3 E∀ [x/s0]
5.	$\forall x \forall y(x<y \vee (x=y \vee y>x))$	N9
6.	$\forall y(s0<y \vee (s0=y \vee y>s0))$	5 E∀ [x/s0]
7.	$s0<0 \vee (s0=0 \vee 0<s0)$	6 E∀ [y/0]
8.	$s0=0 \vee 0<s0$	2,7 SD
9.	$0<s0$	4,8 SD

A única coisa a lembrar na dedução acima é que o uso de SD em 4 e 8 para gerar a linha 9 é possível porque $s0 \neq 0$ é na verdade uma abreviação de $\neg(s0=0)$.

Exercício 17.4 Demonstre os seguintes teoremas de N [*alguns deles são difíceis*]:

(a)	$1+1=2$	(d)	$2+2=4$	(g)	$1\times 2=2$
(b)	$0\neq 1$	(e)	$1\times 1=1$	(h)	$1<2$
(c)	$1\neq 2$	(f)	$2+1=1+2$	(i)	$\neg(3<2)$

17.3.2 Indução matemática

Ainda que já possamos demonstrar muitas coisas usando os axiomas N1–N9 acima, esta axiomática está longe de ser completa. Por

exemplo, se você brincar um pouco com os axiomas, vai ver que podemos demonstrar a seguinte série infinita de teoremas:

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0, \\ 0+s0 &= s0, \\ 0+ss0 &= ss0, \\ 0+sss0 &= sss0, \\ 0+ssss0 &= ssss0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Isso sugere que, qualquer que seja x, se acrescentarmos x a zero o resultado é x. Ou seja, deveríamos ter que $\vdash_N \forall x(0+x=x)$. Mas essa fórmula, primeiro, não é o axioma N3. Lembre-se de que N3 é $\forall x(x+0=x)$. E, em segundo lugar, não é possível demonstrar, apenas usando os axiomas de N, que $\vdash_N \forall x(0+x=x)$. (Não vou demonstrar isso aqui, mas quem sabe você tente fazer um tablô usando N1–N9 como premissas...) Da mesma forma, não é possível demonstrar que a adição é comutativa, ou seja, que

$$\vdash_N \forall x \forall y(x+y=y+x).$$

Assim, ficou ainda faltando alguma coisa em nossa axiomática, que nos permita provar as fórmulas mencionadas acima que, obviamente, devem ser verdadeiras com relação aos números naturais. O que está faltando é o conhecido *princípio de indução matemática.*

Este princípio, ainda que chamado de "indução", é na verdade uma espécie de raciocínio dedutivo. Ele pode ser apresentado na forma de um esquema de axioma, ou então na forma de uma regra de inferência (que é a alternativa que tomaremos aqui). A idéia é a seguinte: suponhamos que você consiga demonstrar que 0 tem alguma propriedade **P** qualquer. Suponhamos ainda que você consiga demonstrar que, se algum número x tem **P**, então o sucessor de x tem **P**. O princípio de indução matemática vai então garantir que todo número tem **P**.

Vamos tentar entender isto. Demonstrar que 0 tem a propriedade **P** significa dizer que o primeiro elemento do conjunto dos naturais tem **P**. Em segundo lugar, se mostrarmos que, se x tem **P**, então sx

tem **P**, isso quer dizer que um número "passa" a propriedade **P** ao seu sucessor. Em outras palavras, como 0 tem **P**, segue-se que 1 tem **P**. Como 1 tem **P**, segue-se que 2 tem **P**. Como 2 tem **P**, segue-se que 3 tem **P**. Como 3 tem **P**, ... Como você vê, a propriedade **P** vai sendo "propagada" pela série dos naturais afora. E como todo número natural é sucessor de algum natural, na interpretação pretendida, isso garante que todos eles terão a propriedade **P**. Não é fantástico?

Vamos, então, formular mais precisamente nossa regra IM correspondente ao princípio de indução matemática. Seja α uma fórmula em que uma variável **x** ocorre livre. (A fórmula α pode ter outras variáveis livres, mas isso não importa, basta que **x** ocorra livre.)

Indução Matemática (IM):

$$\frac{\alpha[\mathbf{x}/0] \qquad \forall\mathbf{x}(\alpha \rightarrow \alpha[\mathbf{x}/s\mathbf{x}])}{\forall\mathbf{x}\alpha}$$

Ou seja, se é um teorema que $\alpha[\mathbf{x}/0]$ (i.e., α vale para 0), e se também é um teorema que $\forall\mathbf{x}(\alpha \rightarrow \alpha[\mathbf{x}/s\mathbf{x}])$ (i.e., se α vale para x, também vale para sx), então é um teorema que $\forall\mathbf{x}\alpha$ (i.e., α vale para qualquer número natural).

Vamos a um exemplo, a saber, mostrar que $\vdash_N \forall x(0+x=x)$. A prova é a seguinte:

1.	$\forall x(x+0=x)$	N3
2.	$0+0=0$	1 E$\forall$ [$x/0$]
3.	$\quad\mid 0+a=a$	H $\quad ?0+sa=sa$
4.	$\quad\mid \forall x\forall y(x+sy=s(x+y))$	N4
5.	$\quad\mid \forall y(0+sy=s(0+y))$	4 E$\forall$ [$x/0$]
6.	$\quad\mid 0+sa=s(0+a)$	5 E$\forall$ [y/a]
7.	$\quad\mid 0+sa=sa$	3,6 E=
8.	$0+a=a \rightarrow 0+sa=sa$	3–7 RPC
9.	$\forall x(0+x=x \rightarrow 0+sx=sx)$	8 I$\forall$
10.	$\forall x(0+x=x)$	2,9 IM

Note, com relação à prova acima, que a fórmula α envolvida no uso de IM é a fórmula $0+x=x$. Na linha 2, mostramos que $0+0=0$, ou seja, que α vale para 0. Na linha 9, mostramos que $\forall x(0+x=x \rightarrow 0+sx=sx)$. Isto é, se α vale para x, i.e., $0+x=x$, então α vale para sx, i.e., $0+sx=sx$. Desses dois fatos, o princípio de indução matemática

nos permite afirmar que α vale para qualquer x, que é o que temos na linha 10 da prova: $\forall x(0+x=x)$.

Como último exemplo, vamos então demonstrar a comutatividade da adição, isto é, que $\forall x \forall y(x+y=y+x)$. A prova desse teorema é bastante longa, e vamos então fazê-la em duas etapas. Primeiro, vamos mostrar que a seguinte fórmula é um teorema de N:

$$\forall x \forall y(y+sx=sy+x).$$

A razão para isto é que precisaremos dessa fórmula (ou outra equivalente) na demonstração da comutatividade da adição. O mais simples, então, é demonstrar essa fórmula isoladamente, e depois usá-la quando necessário.

Provaremos $\forall x \forall y(y+sx=sy+x)$ usando indução matemática. A fórmula α exigida por IM é, então, $\forall y(y+sx=sy+x)$ — uma fórmula onde x ocorre livre. Vamos primeiro demonstrar que essa fórmula vale quando trocamos x por zero, ou seja, vamos demonstrar a fórmula $\forall y(y+s0=sy+0)$.

1.	$\forall x \forall y(x+sy=s(x+y))$	N4
2.	$\forall y(a+sy=s(a+y))$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	$a+s0=s(a+0)$	2 E$\forall$ [$y/0$]
4.	$\forall x(x+0=x)$	N3
5.	$a+0=a$	4 E$\forall$ [x/a]
6.	$sa=sa$	I=
7.	$s(a+0)=sa$	5,6 E=
8.	$a+s0=sa$	3,7 E=
9.	$sa+0=sa$	4 E$\forall$ [x/sc]
10.	$a+s0=sa+0$	8,9 E=
11.	$\forall y(y+s0=sy+0)$	10 I$\forall$

Como você vê, conseguimos demonstrar a primeira das fórmulas necessárias para usar IM. Temos agora que demonstrar a fórmula correspondente à segunda premissa da regra de indução matemática, ou seja, $\forall \mathbf{x}(\alpha \rightarrow \alpha[\mathbf{x}/s\mathbf{x}])$. Isso corresponde a mostrar, no caso em questão, que $\forall x(\forall y(y+sx=sy+x) \rightarrow \forall y(y+ssx=sy+sx))$. (Lembre-se: se α vale para x, então vale para o sucessor de x.) Já que essa é uma fórmula universal, a estratégia para demonstrá-la consiste em

provar, para alguma constante a qualquer, que $\forall y(y+sa=sy+a) \rightarrow \forall y(y+ssa=sy+sa)$. Essa fórmula agora é um condicional; o mais simples consiste em introduzir o antecedente, $\forall y(y+sa=sy+a)$, como hipótese, e tentar derivar o conseqüente $\forall y(y+ssa=sy+sa)$. E como essa é outra fórmula universal, vamos obtê-la se conseguirmos demonstrar, para uma constante b qualquer, que $b+ssa=sb+sa$. A demonstração continua assim:

12.	$\forall y(y+sa=sy+a)$	H
13.	$b+sa=sb+a$	12 E∀ [y/b]
14.	$s(sb+a)=s(sb+a)$	I=
15.	$s(b+sa)=s(sb+a)$	13,14 E=
16.	$\forall y(b+sy=s(b+y))$	1 E∀ [x/b]
17.	$b+ssa=s(b+sa)$	16 E∀ [y/sa]
18.	$b+ssa=s(sb+a)$	15,17 E=
19.	$\forall y(sb+sy=s(sb+y))$	1 E∀ [x/sb]
20.	$sb+sa=s(sb+a)$	20 E∀ [y/a]
21.	$s(sb+a)=sb+sa$	14,20 E=
22.	$b+ssa=sb+sa$	18,21 E=
23.	$\forall y(y+ssa=sy+sa)$	22 I∀
24.	$\forall y(y+sa=sy+a) \rightarrow \forall y(y+ssa=sy+sa)$	12–23 RPC
25.	$\forall x(\forall y(y+sx=sy+x) \rightarrow \forall y(y+ssx=sy+sx))$	24 I∀

Nessa segunda etapa, demonstramos então a segunda fórmula necessária para uma aplicação de IM. Note que a constante a, que ocorre ainda na linha 24, pode ser trocada pelo x quantificado universalmente na linha 25, já que a hipótese em que a ocorria (linha 12) já não estava mais valendo. A prova, agora, é concluída com apenas mais uma linha, aplicando-se IM às linhas 11 e 25:

26.	$\forall x\forall y(y+sx=sy+x)$	11,25 IM

De posse da fórmula acima como teorema, podemos então demonstrar a comutatividade da adição, como queríamos. A fórmula correspondente a α, para indução matemática, será obviamente $\forall y(x+y=y+x)$, que é uma fórmula onde x ocorre livre.

O primeiro passo, claro, é mostrar que α vale para zero. Começamos então da seguinte maneira:

1.	$\forall x(x+0=x)$	N3
2.	$a+0=a$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	$\forall x(0+x=x)$	Teorema
4.	$0+a=a$	3 E$\forall$ [x/a]
5.	$a+0=0+a$	2,4 E=

Até aqui demonstramos a propriedade para 0, ou seja, o correspondente a $\alpha[x/0]$. A prova continua, e temos agora que demonstrar a segunda premissa da regra de indução matemática. Nesse caso, precisamos mostrar que $\forall x(\forall y(x+y=y+x) \rightarrow \forall y(sx+y=y+sx))$. De forma análoga ao que ocorreu na prova do teorema anterior, temos uma fórmula universal, e a estratégia para demonstrá-la consiste em provar, para alguma constante a qualquer, que $\forall y(a+y=y+a) \rightarrow \forall y(sa+y=y+sa)$. Como essa fórmula é um condicional, vamos introduzir o antecedente, $\forall y(a+y=y+a)$, como hipótese, e tentar derivar o conseqüente. Assim:

6.	│ $\forall y(a+y=y+a)$	H
7.	│ $a+b=b+a$	6 E$\forall$ [y/b]
8.	│ $s(b+a)=s(b+a)$	I=
9.	│ $s(a+b)=s(b+a)$	7,8 E=
10.	│ $\forall x\forall y(x+sy=s(x+y))$	N4
11.	│ $\forall y(a+sy=s(a+y))$	10 E$\forall$ [x/a]
12.	│ $a+sb=s(a+b)$	11 E$\forall$ [y/b]
13.	│ $a+sb=s(b+a)$	9,12 E=
14.	│ $\forall y(b+sy=s(b+y))$	10 E$\forall$ [x/b]
15.	│ $b+sa=s(b+a)$	13 E$\forall$ [y/a]
16.	│ $a+sb=b+sa$	13,15 E=
17.	│ $\forall x\forall y(y+sx=sy+x)$	Teorema
18.	│ $\forall y(y+sb=sy+b)$	17 E$\forall$ [x/b]
19.	│ $a+sb=sa+b$	18 E$\forall$ [y/a]
20.	│ $sa+b=sa+b$	I=
21.	│ $sa+b=a+sb$	19,20 E=
22.	│ $sa+b=b+sa$	16,21 E=
23.	│ $\forall y(sa+y=y+sa)$	22 I$\forall$
24.	$\forall y(a+y=y+a) \rightarrow \forall y(sa+y=y+sa)$	6–23 RPC
25.	$\forall x(\forall y(x+y=y+x) \rightarrow \forall y(sx+y=y+sx))$	24 I$\forall$
26.	$\forall x\forall y(x+y=y+x)$	5,25 IM

E assim completamos a demonstração desejada.

Exercício 17.5 Demonstre os seguintes teoremas de N [*difíceis*]:

(a) $\forall x \exists y (y = sx)$
(b) $\forall x (x \neq sx)$
(c) $\forall x (0 \times x = 0)$
(d) $\exists y (0 < y)$
(e) $\forall x \forall y (x \times y = y \times x)$
(f) $\forall x \forall y \forall z ((x + (y + z) = (x + y) + z))$

17.3.3 Propriedades de N

Para encerrar este capítulo, vamos considerar brevemente quais das propriedades anteriormente definidas têm a nossa axiomatização N da aritmética dos naturais.

A interpretação pretendida da teoria N, como eu disse, é a estrutura $\mathfrak{N}$ cujo universo são os números naturais, onde 0 denota o número zero, s a função sucessor, $+$ e $\times$ a soma e o produto, respectivamente, e $<$ é a relação 'x é menor que y'. A primeira pergunta, claro, é se os axiomas de N são verdadeiros em $\mathfrak{N}$.

Intuitivamente, sim. Não há como duvidar da verdade de, por exemplo, $\forall x \neg (x < 0)$. Mas claro que esse apelo à verdade intuitiva dos axiomas de N não é a mesma coisa que uma demonstração rigorosa disso. Portanto, vamos considerar a afirmação de que $\mathfrak{N} \vDash N$, i.e., que $\mathfrak{N}$ é um modelo de N, como uma suposição.

Agora, uma vez que, como suposto, N tem um modelo na estrutura $\mathfrak{N}$, podemos dizer que N é consistente. Isso decorre do teorema abaixo, que vamos apenas enunciar, mas não demonstrar:

Teorema 17.1 *Uma teoria T é consistente se e somente se T tem um modelo.*

Em poucas palavras, se os axiomas de N são verdadeiros em $\mathfrak{N}$, e se IM é uma regra que preserva a verdade (ou seja, se as premissas da regras são verdadeiras, a conclusão também é), então os teoremas de N também são verdadeiros em $\mathfrak{N}$. Como uma contradição

$\alpha \wedge \neg\alpha$ qualquer obviamente é falsa em $\mathfrak{N}$, segue-se que $N \nvdash \alpha \wedge \neg\alpha$ e, portanto, é consistente.

Com relação aos axiomas de N, foi demonstrado (em 1953, por Ryll-Nardzewski), que a aritmética de Peano, com o princípio de indução matemática, não é finitamente axiomatizável. Ou seja, não há um conjunto finito de fórmulas que, apenas junto com regras da lógica, deduza exatamente os teoremas de N. Como você vê, precisamos conservar o princípio de indução matemática, seja sob a forma de uma regra adicional, ou de um esquema de axioma.

A última pergunta diz respeito à completude de N, e, infelizmente, N não é completa. Isso foi demonstrado por Kurt Gödel em 1931, por meio do seu famoso Teorema da Incompletude. Na verdade, são dois teoremas. Uma versão fraca do primeiro deles diz:

Teorema 17.2 *Se N é consistente, então há ao menos uma sentença σ de $\mathcal{L}_N$ tal que nem σ nem $\neg\sigma$ são teoremas de N. Ou seja, $N \nvdash \sigma$ e $N \nvdash \neg\sigma$.*

A conseqüência imediata disso, uma vez que ou σ ou $\neg\sigma$ é verdadeira em $\mathfrak{N}$, é que existem sentenças de $\mathcal{L}_N$ verdadeiras em $\mathfrak{N}$ que, no entanto, são *indemonstráveis* em N. Portanto, com os axiomas de N não conseguimos provar tudo o que é verdadeiro na aritmética dos naturais.

Bem, poder-se-ia pensar que isso é facilmente remediável: se há alguma sentença σ verdadeira em $\mathfrak{N}$, mas indemonstrável, então σ é independente dos demais axiomas, e só precisamos fazer uma nova teoria, $N \cup \{\sigma\}$, que seria então completa. Porém, Gödel demonstrou o teorema da incompletude em uma versão mais forte do que a apresentada acima, versão que mostra que também isso não é possível, e que pode ser assim enunciada:

Teorema 17.3 *Seja T uma teoria axiomática consistente na qual se possa desenvolver a adição e multiplicação dos números naturais. Então T é incompleta.*

O significado dessa segunda versão do teorema é que, não importa que conjunto de axiomas tenhamos para a aritmética dos naturais,

não importa que axiomas adicionais formos acrescentando a N, a teoria T resultante será sempre incompleta. Como Gödel mostrou, será sempre possível encontrar uma nova sentença τ, tal que $T \nvdash \tau$ e $T \nvdash \neg\tau$. Em outras palavras, N é *essencialmente incompleta*, e uma conseqüência fundamental disso é que o conceito de verdade em matemática não pode ser identificado com o conceito de demonstrabilidade em algum sistema formal.

O primeiro teorema de incompletude, como você notou, supõe que a teoria axiomática da aritmética seja consistente. O segundo teorema de Gödel vai mostrar, então, que não é possível demonstrar a consistência da aritmética dentro da própria aritmética, ou seja, usando os meios da própria aritmética.

Apesar dos resultados de Gödel citados acima, há uma versão fraca de completude para a nossa teoria N: Alonzo Church demonstrou que toda sentença verdadeira de $\mathcal{L}_N$ *que não contenha quantificadores* é demonstrável. Por exemplo, podemos demonstrar que $7+5=12$, ou que $4<9$, e coisas assim. Mas, claro, as coisas mais interessantes de demonstrar são generalizações, que já envolvem quantificadores, e que portanto nem sempre podem ser provadas.

E, finalmente, o mesmo Church demonstrou em 1936 que N é indecidível, ou seja, não há um algoritmo para determinar sempre se alguma fórmula é ou não teorema de N.

CAPÍTULO 18

LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS

Até o capítulo anterior, viemos nos ocupando do que é usualmente chamado de *lógica clássica*; no entanto, existem muitos outros tipos e sistemas de lógica. Neste capítulo, vou apresentar uma breve caracterização do que é a lógica clássica, para então falar um pouco do que são *lógicas não-clássicas*, examinando também alguns exemplos de lógicas que procuram complementar a lógica clássica e de outras que procuram substituí-la. Para finalizar, alguns comentários sobre a situação atual da lógica.

18.1 O que é a lógica clássica?

Como vimos ao iniciar este livro, a lógica pode ser caracterizada como o estudo dos princípios e métodos de inferência, ou do raciocínio válido. Vimos que o raciocínio é um processo mental ao qual podem corresponder argumentos (que poderiam ser considerados, digamos, uma reconstrução explícita do raciocínio efetuado). Uma das coisas das quais a lógica se ocupa, então, é da questão da *validade* desses argumentos, isto é, a questão de saber se as premissas constituem realmente uma boa razão para aceitar a conclusão. Como você se recorda, isso pode ser formulado de outro modo: *se as premissas forem todas verdadeiras, a conclusão será, necessariamente, verdadeira?*

A oração grifada acima expressa a noção informal que temos de *conseqüência lógica*. Podemos parafrasear isso dizendo que a conclusão de um argumento é conseqüência lógica das premissas se não é possível que, simultaneamente, suas premissas sejam verdadeiras e sua conclusão seja falsa. Essa noção é ainda informal porque usamos expressões ainda não muito precisas, como 'não é possível'. Boa parte do que fizemos ao longo deste livro consistiu em tentar tornar mais precisa essa noção de conseqüência lógica — e o resultado foi o $\mathbf{CQC}_f^=$, do qual nos ocupamos até agora.

Para recuperar um pouco a trajetória percorrida, vimos que a lógica procura determinar a validade não de argumentos particulares, mas de classes de argumentos (argumentos "com a mesma forma"). Não é muito fácil definir o que seja a forma lógica de um argumento (até mesmo se discute se há uma). Em princípio a forma tem algo a ver com a estrutura gramatical das sentenças envolvidas; contudo, a questão é mais complexa do que isso. É bom lembrar, porém, que a hipótese de trabalho da lógica é que, em geral, os argumentos em uma língua como o português podem ser, de alguma maneira, "formalizados" em — ou seja, traduzidos para — alguma linguagem artificial (ainda que, para muitos argumentos, não haja uma maneira óbvia de fazer isso).

Desse modo, um sistema lógico — uma *lógica* — compreende uma *linguagem artificial* na qual argumentos em português podem ser codificados (formalizados). A vantagem do uso de linguagens artificiais, claro, é que elas têm gramáticas precisas, e evitam as ambigüidades tão comuns nas línguas naturais. (Espero que você tenha se convencido disto, depois dessas centenas de páginas!)

Dada uma linguagem artificial (para a qual se podem traduzir sentenças do português), temos, então, que caracterizar precisamente a noção de conseqüência lógica para as fórmulas dessa linguagem. Como vimos com relação ao $\mathbf{CQC}_f^=$, isso pode ser feito de duas maneiras:

Semântica (interpretações): uma fórmula α é conseqüência lógica de um certo conjunto de fórmulas Γ se todas as interpretações que tornam verdadeiras todas as fórmulas de Γ também tornam α verdadeira. (Neste livro, tivemos primeiro as valorações, e depois as estruturas.)

Sintática (manipulação de símbolos): uma fórmula α é conseqüência lógica de um certo conjunto de fórmulas Γ se é possível derivar α a partir das fórmulas que estão em Γ por meio do uso de *regras de inferência* e, eventualmente, de *axiomas*. É o que fizemos com o método de dedução natural, e é o que se faz com sistemas axiomáticos de um modo geral.

Dependendo de como se apresenta essa noção de conseqüência lógica (como vimos, no $\mathbf{CQC}_f^=$, as versões sintática e semântica são equivalentes), há certos métodos que nos permitem testar a validade dos argumentos formalizados. Para dar um exemplo, para a lógica proposicional temos o conhecido método de tabelas de verdade. Outros métodos incluem tablôs semânticos e dedução natural, além de outros que eu não havia mencionado, como o método de resolução, ou ainda o cálculo de seqüentes.

Para começarmos a falar de lógicas não-clássicas, precisamos, obviamente, caracterizar o que é a lógica clássica. Apresso-me a dizer, antes que surja alguma confusão, que ela *não é* a teoria do silogismo de Aristóteles — essa última costuma ser chamada de *lógica tradicional*.

A lógica clássica compreende, basicamente, o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais (o $\mathbf{CQC}_f^=$, também denominado *lógica elementar*). Note que, ainda que apresentado como um sistema só, o $\mathbf{CQC}_f^=$ é composto de vários subsistemas, que podem ser estudados/apresentados isoladamente:

- o cálculo proposicional clássico (o **CPC**: apenas operadores e predicados zero-ários, as letras sentenciais);
- o cálculo de predicados monádico de primeira ordem (apenas símbolos de propriedades, mas não de relações);
- o cálculo de predicados geral de primeira ordem (o **CQC**);
- o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade;
- o cálculo de predicados de primeira ordem com símbolos funcionais (também chamado de *lógica funcional*);
- e, finalmente, o $\mathbf{CQC}_f^=$, que reúne tudo.

É uma questão discutível se deveríamos incluir na lógica clássica o cálculo de predicados de segunda ordem e de ordens superiores, embora isso seja feito pela maioria dos autores. Mas o que é, afinal, uma lógica de segunda ordem?

Para você ter uma idéia do que possa ser isso, considere o seguinte argumento:

P Claudia Schiffer e Salma Hayek são lindas.
► Há uma propriedade que Claudia Schiffer e Salma Hayek têm em comum.

Note que a conclusão do argumento diz que 'há uma propriedade que...', e para formalizar isso corretamente precisamos fazer uso de *variáveis de predicados*. Até agora tivemos apenas constantes de predicados, e nossas variáveis eram variáveis *individuais*. Digamos então que as letras maiúsculas de U até Z, com ou sem subscritos, sejam variáveis de predicado. Usando L para 'x é linda', e c e s para denotar as damas em questão, o argumento acima poderia então ser formalizado da seguinte maneira:

P $Lc \wedge Ls$
► $\exists X(Xc \wedge Xs)$

Como você vê, na conclusão temos quantificação sobre um predicado de indivíduos, e é isso o que caracteriza a lógica de segunda ordem. Em um cálculo de terceira ordem temos quantificação sobre predicados de predicados de indivíduos, e assim por diante. Tudo isso, então, pode ser incluído na lógica clássica, e alguns autores chegam ao ponto de incluir nela a teoria de conjuntos (teríamos, neste caso, o que se chama de *grande lógica*), mas a opinião mais corrente é a de não fazer essa inclusão.

Entre as características próprias da lógica clássica costuma-se colocar a obediência a alguns princípios lógicos fundamentais (as assim chamadas "leis fundamentais do pensamento") — denominados princípios lógicos clássicos. São os seguintes:

Princípio de identidade: se uma proposição é verdadeira, então ela é verdadeira. Formalmente, $\alpha \rightarrow \alpha$. Ou, numa outra versão: todo objeto é idêntico a si mesmo, $\forall x(x = x)$.

Princípio de não-contradição: dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é falsa. Ou seja, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Princípio do terceiro excluído: dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira. Isto é, $\alpha \vee \neg\alpha$.

Princípio da bivalência: toda proposição é ou verdadeira ou falsa.

Além da obediência a esses princípios, algumas outras coisas valem ainda na lógica clássica. Por exemplo:

- os operadores ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) são funções de verdade (isto é, operadores extensionais): pode-se calcular o valor de verdade de uma fórmula molecular sabendo o valor de verdade de suas componentes mais simples;
- o universo de uma estrutura é sempre não-vazio (contém pelo menos um indivíduo);
- as constantes individuais (e termos fechados em geral) têm referência, isto é, deve haver um indivíduo no universo da estrutura do qual a constante ou termo é um nome.

Uma lógica — como a lógica clássica — pode ser caracterizada, como vimos acima, por uma relação de conseqüência, definida sintática ou semanticamente. Além disso, podemos fazer isto por meio de um conjunto das fórmulas válidas (ou seja, as fórmulas verdadeiras em qualquer interpretação); ou um sistema axiomático (um certo conjunto de axiomas e regras de inferência); ou ainda o conjunto dos teoremas de um sistema axiomático, ou de um sistema de dedução natural.

A lógica clássica pode ser caracterizada indiferentemente pelas várias alternativas acima. Isto é, o conjunto resultante de teoremas/fórmulas válidas — as “leis lógicas” — é exatamente o mesmo em qualquer dos casos. Há outras lógicas, porém, de que falaremos mais tarde, nas quais nem todas essas possibilidades estão disponíveis. Para ir adiantando um exemplo, o cálculo de predicados de segunda ordem já sofre desse problema — o conjunto de fórmulas válidas inclui propriamente o conjunto dos teoremas — qualquer que seja a axiomática apresentada. Ou seja, o cálculo de predicados de segunda ordem é incompleto.

18.2 Lógicas não-clássicas

As possibilidades de aplicação da lógica clássica são fantasticamente enormes (poderíamos dizer que ela tem, de fato, 1001 utilidades); contudo, há alguns senões. Para dar um exemplo, o tempo não é considerado de modo algum. Vejamos os argumentos abaixo:

(A1) P1 João casou com Maria.
P2 Maria é viúva.
▶ João casou com uma viúva.

(A2) P Sócrates corre.
▶ Sócrates terá corrido.

Intuitivamente, diríamos que o primeiro deles é inválido (Maria pode ser viúva agora, não quando João casou-se com ela — ou seja, João morreu), e o segundo, válido. Porém, não há como formalizar (A1) ou (A2) diretamente na lógica clássica, de modo a preservar essas intuições. Podemos formalizar (A1), por exemplo, da seguinte maneira (usando C para 'x casa com y', B para 'x é viúva', e j e m as constantes para João e Maria):

(A1) P1 Cjm
P2 Bm
▶ $\exists x(Bx \wedge Cjx)$

O resultado é uma forma de argumento *válida* (confira!), contrariando nossas intuições. Quanto a (A2), ou não teríamos distinção entre as proposições ('Sócrates terá corrido' seria a mesma coisa que 'Sócrates corre', traduzindo tudo para o presente), ou teríamos uma forma inválida, ao usar, digamos, C para representar 'x corre', e T para 'x terá corrido'.

A razão da ausência de considerações temporais na lógica clássica é que ela surgiu para auxiliar na fundamentação da matemática, em que o tempo, claro, não é essencial. Note-se, porém, que o não-tratamento do tempo verbal pela lógica clássica só constitui um problema se considerarmos objetivo da lógica o estudo dos princípios que governam qualquer tipo de raciocínio — raciocínio em geral — e

não só o raciocínio em matemática, como querem algumas correntes — por exemplo, o intuicionismo (de que falaremos depois).

Por outro lado, há uma maneira de introduzir o tempo na lógica clássica: isso implica postular a existência de instantes, por exemplo, e fazer quantificação sobre eles.

O primeiro dos argumentos acima, assim, poderia ser formalizado na lógica clássica da maneira indicada abaixo, onde n representa o instante presente, o 'agora', I é a propriedade 'x é um instante', e $<$ é uma relação binária entre instantes, tal que '$x < y$' significa que x é anterior a y. Além disso, B não é mais a *propriedade* 'x é uma viúva', mas uma *relação binária* entre um indivíduo e um instante: 'x é uma viúva em y'. Analogamente, C passa a ser a relação ternária 'x casa com y em z', e R passa a ser a relação binária 'x corre em y'.

(A1) P₁ $\exists z(Iz \land z < n \land Cjmz)$
P₂ Bmn
▶ $\exists x \exists z(Iz \land z < n \land Cjxz \land Bxz)$

(A2) P Rsn
▶ $\exists z(Iz \land n < z \land \exists w(Iw \land w < z \land Rsw))$

Assim formalizados, (A1) fica inválido, e (A2) válido, exatamente de acordo com nossas intuições. Note, contudo, que todas as constantes de predicado acabam ganhando um argumento adicional: $Cjmt$ significa 'João casa com Maria no instante t', e assim por diante. Além disso, precisaríamos introduzir mais alguns axiomas, para dar conta também das relações temporais.

Por outro lado, a idéia básica de uma *lógica do tempo* é simplesmente a introdução de novos operadores na linguagem lógica, em vez de instantes no universo. Tendo os operadores:

P: foi o caso que ...
(i.e., aconteceu ao menos uma vez no passado que ...)

F: será o caso que ...
(i.e, acontecerá ao menos uma vez no futuro que ...)

os argumentos anteriores poderiam ser formalizados da seguinte maneira:

(A1) p_1 $\mathsf{P}Cjm$
p_2 Bm
▶ $\mathsf{P}\exists x(Bx \wedge Cjx)$

(A2) p Rs
▶ $\mathsf{FP}Rs$

que, obviamente, têm uma estrutura muito mais simples.

As lógicas não-clássicas são comumente divididas em dois grupos:

Lógicas complementares: aquelas cujo objetivo é *estender* a lógica clássica (por exemplo, como na lógica do tempo, acrescentando novos operadores à linguagem).

Lógicas alternativas: aquelas cujo objetivo é *substituir* a lógica clássica.

Essa divisão é, naturalmente, bastante artificial, pois, como veremos, podemos ter lógicas que acrescentam coisas à lógica clássica, por um lado, enquanto, por outro, excluem dela alguns princípios. Mas é uma divisão que serve como um ponto de partida.

As lógicas complementares, ou *lógicas ampliadas*, consideram que a lógica clássica está correta dentro dos seus limites — mas que muitas coisas foram deixadas de fora, coisas que seria preciso considerar também. Portanto, é preciso estender a lógica clássica, acrescentar-lhe o que ficou faltando. Usualmente, essas extensões são feitas por uma ampliação da linguagem, acrescentando-se novos operadores que não são funções de verdade, os chamados operadores *intensionais*. Os operadores temporais F e P mencionados acima são um exemplo; depois veremos outros e, dependendo do tipo de operador, teremos lógicas *modais*, *temporais*, *epistêmicas*, *deônticas*, e ainda outras.

Você poderia perguntar-se por que, além de operadores intensionais, não podemos estender a lógica clássica acrescentando outras funções de verdade que ainda não estejam nela. A resposta é que isso não é possível, pois *todas* as funções de verdade, implicitamente, já estão lá. Sem querer entrar em detalhes, o que nos levaria muito longe, pode-se demonstrar que, tendo apenas, digamos, $\neg$ e $\wedge$ como operadores, qualquer função de verdade pode ser definida — assim como podemos definir $\alpha \vee \beta$ como $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. Portanto, qualquer operador que seja "novo" mesmo não será uma função de verdade.

Uma outra maneira de estender a lógica clássica, além da adição de novos operadores, consiste em eliminar a restrição de que a lógica deve se ocupar apenas de sentenças declarativas — ou, de forma equivalente, de que apenas sentenças declarativas são passíveis de formalização. Poderíamos, assim, incluir no âmbito da análise lógica outros tipos de sentença, como sentenças interrogativas, ou imperativas. Nesse caso, o resultado seriam lógicas *erotéticas* (das questões), e lógicas *imperativas*.

Para falar um pouco mais sobre lógicas complementares, vamos tomar a lógica modal alética como exemplo. Posteriormente você vai conhecer algumas lógicas alternativas.

18.3 Lógica modal alética

18.3.1 Introdução

A lógica modal *alética* é aquela que se ocupa dos conceitos de *necessidade* e *possibilidade*. O adjetivo 'modal', a propósito, vem da expressão 'modos de verdade', e 'alética', da palavra grega que significa 'verdade'. A idéia é que uma proposição, além de ser (contingentemente) verdadeira ou falsa, pode ainda ser necessária (i.e., necessariamente verdadeira) ou impossível (i.e., necessariamente falsa).

A lógica modal é, por assim dizer, a mais antiga entre as lógicas não-clássicas. Já Aristóteles e seu sucessor Teofrasto haviam se ocupado de conceitos modais, formulando mesmo uma teoria dos silogismos modais (a qual não chegou a ser desenvolvida satisfatoriamente). De modo similar, filósofos megáricos (como Diodoro Cronus) também discutiram questões relacionadas às modalidades. Contudo, apesar desse início bem antigo, os primeiros sistemas de lógica modal só vieram a aparecer no século XX, por meio dos trabalhos de C. I. Lewis (1918) sobre a lógica modal proposicional, e de Ruth B. Marcus (1946) sobre o cálculo modal de predicados.

A motivação original de Lewis, contudo, não era investigar noções de necessidade e possibilidade por si mesmas; ele estava interessado em encontrar uma implicação mais rigorosa que a implicação material da lógica clássica. A implicação material tem alguns problemas que são conhecidos como "paradoxos da implicação" (ainda que

estes não sejam propriamente paradoxos, mas sim resultados anti-intuitivos). Note que as seguintes fórmulas (na verdade, *esquemas* de fórmulas) são válidas na lógica clássica:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$
$$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$$
$$(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$$

O problema está em ler o operador $\to$ como implicação. A primeira das fórmulas acima diz que uma proposição verdadeira é implicada por qualquer proposição; a segunda, que uma proposição falsa implica qualquer proposição; e a terceira, que, dadas duas proposições quaisquer, a primeira implica a segunda, ou a segunda implica a primeira. Tudo isso, claro, vai contra nossas intuições a respeito do que deva ser uma implicação. Dizer que 'Beethoven era italiano' implica 'a Lua é feita de queijo' realmente parece estranho; contudo, podemos entender por que isso acontece se lembrarmos que a seguinte fórmula é válida no **CQC**:

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta).$$

Trocando isso em palavras, temos $\alpha \to \beta$ se não acontece que tenhamos α verdadeira e β falsa. Com relação ao mundo real, como acontece que

$$\neg(\text{Beethoven era italiano} \wedge \neg \text{ a Lua é feita de queijo})$$

(já que a sentença 'Beethoven era italiano' é falsa), temos então que

$$\text{Beethoven era italiano} \to \text{ a Lua é feita de queijo.}$$

A idéia de Lewis, entretanto, foi a seguinte: ainda que não aconteça que Beethoven seja italiano e a Lua não seja feita de queijo, não seria possível que Beethoven *fosse* italiano (a Lua, claro, continuando a não ser feita de queijo)? Como é possível que o antecedente seja verdadeiro e o conseqüente, falso, não podemos dizer que 'Beethoven era italiano' implica 'a Lua é feita de queijo'.

O conceito de implicação assim caracterizado é um conceito mais forte: uma fórmula α implica uma fórmula β se *não é possível* ter

α e $\neg\beta$. Essa implicação proposta por Lewis, e chamada por ele *implicação estrita*, pode ser então definida da seguinte maneira:

$$(\alpha \prec \beta) \leftrightarrow \neg\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta),$$

em que $\alpha \prec \beta$ significa 'α implica estritamente β'. Lendo $\Diamond$ como 'é possível que', temos que α implica β se é impossível que α e não β.

Feitas assim as coisas, Lewis percebeu que precisava desenvolver uma teoria lógica de modalidades para fundamentar seu conceito de implicação, o que ele fez apresentando vários sistemas. A partir daí surgiram as lógicas modais aléticas, que consistem, basicamente, na adição à linguagem da lógica clássica dos operadores unários $\Box$ e $\Diamond$, cujos significados são:

$\Box\alpha$: é necessário que α / necessariamente α
$\Diamond\alpha$: é possível que α / possivelmente α

É claro que há vários conceitos ou noções diferentes de necessidade, e, de acordo com isso, poderemos ter vários sistemas de lógica modal. A necessidade é, em princípio, pensada como necessidade lógica, mas podemos ter também um conceito físico de necessidade (i.e., necessário de acordo com as leis físicas), ou falarmos de necessidade histórica, moral (obrigação), computacional ('depois da execução do programa, . . . '), e assim por diante.

Tendo introduzido novos operadores na linguagem, precisamos, claro, alterar a definição de fórmula. Para isso, é suficiente acrescentar a seguinte cláusula à definição:

- Se α é uma fórmula, então $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ são fórmulas.

Com esses operadores podemos, então, formalizar sentenças tais como:

É possível que chova, e é possível que faça frio.

Necessariamente, se neva, então faz frio.

Usando C para 'chove', N para 'neva', e F para 'faz frio', temos:

$$\Diamond C \wedge \Diamond F,$$
$$\Box(N \rightarrow F).$$

Como exemplos um pouco mais complicados, podemos ter

Não é possível que exista um gato que não é gato.
Necessariamente, todo gato preto é preto.

O que podemos formalizar da seguinte maneira (G: x é um gato; P: x é preto):

$$\neg\Diamond\exists x(Gx \wedge \neg Gx),$$
$$\Box\forall x((Gx \wedge Px) \rightarrow Px).$$

Os quantificadores, contudo, criam problemas interessantes e complicados quando combinados com operadores modais, de modo que, no que segue, vamos nos restringir à lógica modal proposicional. Nossa linguagem básica, então, será uma linguagem contendo como símbolos não-lógicos apenas predicados zero-ários.

18.3.2 Modelos de mundos possíveis

A questão é: como fica a semântica dos novos operadores que introduzimos? Como eu disse, eles não são funções de verdade: não é, em geral, possível calcular o valor de $\Box\alpha$ a partir do valor de α. Veja o que acontece se tentarmos:

α	$\Box\alpha$	$\Diamond\alpha$
V	?	**V**
F	**F**	?

Com respeito a $\Box$, se α é falsa então parece ser óbvio que $\Box\alpha$ deve ser também falsa — afinal, $\Box\alpha$ deveria significar que α é *necessariamente verdadeira*. Por outro lado, se α é verdadeira, que se pode concluir a respeito do valor de verdade de $\Box\alpha$? Nada. A proposição α pode ser contingentemente verdadeira (como 'Napoleão foi derrotado em Waterloo'), ou então necessária (talvez, digamos, como $2+2=4$). Mas, obviamente, não sabemos dizer isso apenas a partir do valor de α. De modo similar, se α é verdadeira, então, obviamente, α é possível: logo, $\Diamond\alpha$ é verdadeira. Contudo, e se α for falsa? Outra

vez, nada podemos concluir: mesmo falsa, α poderia ser possível. Ou talvez não.

A partir disso, verificamos que não dispomos de uma tabela básica para os operadores modais, ao contrário do que acontece para os operadores usuais da lógica clássica. Isso não significa que não possamos fazer uma semântica para lógicas modais — apenas que essa semântica vai ser um pouco mais complicada.

A intuição que está por trás da semântica para as lógicas modais envolve a noção de *mundo possível*. Por exemplo, podemos imaginar um mundo em que Sócrates, em vez de ter bebido cicuta, tivesse vivido até uma idade avançada e escrito um tratado de filosofia em vinte volumes. Ou um mundo no qual, ao contrário do mundo real, há uma ponte sobre o estreito de Gibraltar. Ou um mundo — se bem que é mais difícil imaginar isto — no qual Claudia Schiffer fosse feia.[1] Enfim, já Leibniz havia se ocupado dos mundos possíveis, e é dele que vem a intuição a seguir sobre o significado de necessário e possível:

- $\Box\alpha$ é verdadeira se α é verdadeira em todos os mundos possíveis;
- $\Diamond\alpha$ é verdadeira se α é verdadeira em algum mundo possível.

Assim, enquanto, na lógica proposicional clássica, uma interpretação (valoração) consiste em uma atribuição de valores $\{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$ às letras sentenciais, em lógica modal, uma interpretação consiste em um conjunto de mundos possíveis e, para cada um deles, uma atribuição de valores às fórmulas. Em vez de interpretação, porém, falamos mais comumente de um *modelo de mundos possíveis*, ou *modelo de Kripke* (por causa de Saul Kripke, que foi quem os concebeu).

Vamos ver um exemplo. Temos na figura 18.1 abaixo um diagrama representando um modelo com três mundos possíveis, w_1, w_2, e w_3. As proposições podem ter valores diferentes em cada um desses mundos. Por exemplo, A é verdadeira em w_1, mas falsa em w_2. Note que $\Box$A é falsa em qualquer mundo, já que A é falsa em ao menos

[1] Nesse caso, ela ainda seria Claudia Schiffer? Sócrates ainda seria Sócrates, se fosse um carpinteiro em vez de filósofo? Não vamos entrar nesses problemas aqui, mas Loux (1979) é um bom lugar para começar, caso você queira ler mais sobre o assunto.

um. Já $\Box B$ recebe o valor **V**, uma vez que B é verdadeira em todos os mundos. Finalmente, $\Diamond A$ é verdadeira (em w_3, por exemplo), já que, ainda que A seja falsa em w_3, há um mundo possível onde A seja verdadeira.

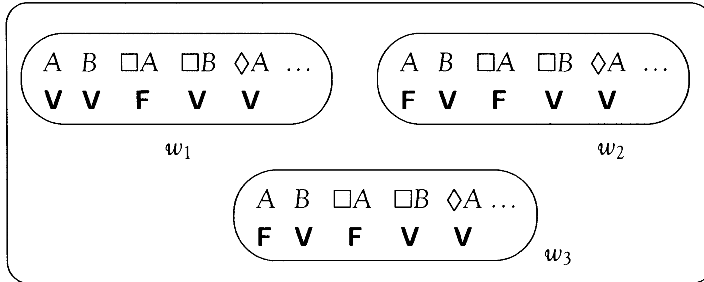


FIGURA 18.1 — Um modelo de mundos possíveis.

Formalmente, as coisas ficam da seguinte maneira:

Definição 18.1 *Um modelo de mundos possíveis $\mathfrak{M}$ é um par $\langle W, V\rangle$, onde W é um conjunto (não-vazio) de mundos possíveis, e V é uma função do conjunto de todas as fórmulas e de W em $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ satisfazendo as seguintes condições (onde w é um mundo qualquer em W):*

(a) $V(\neg\alpha, w) = \mathbf{V}$ *sse* $V(\alpha, w) = \mathbf{F}$;
(b) $V(\alpha \wedge \beta, w) = \mathbf{V}$ *sse* $V(\alpha, w) = V(\beta, w) = \mathbf{V}$;
(c) $V(\alpha \vee \beta, w) = \mathbf{V}$ *sse* $V(\alpha, w) = \mathbf{V}$ *ou* $V(\beta, w) = \mathbf{V}$;
(d) $V(\alpha \rightarrow \beta, w) = \mathbf{V}$ *sse* $V(\alpha, w) = \mathbf{F}$ *ou* $V(\beta, w) = \mathbf{V}$;
(e) $V(\alpha \leftrightarrow \beta, w) = \mathbf{V}$ *sse* $V(\alpha, w) = V(\beta, w)$;
(f) $V(\Box\alpha, w) = \mathbf{V}$ *sse para todo mundo v em $\mathfrak{M}$*, $V(\alpha, v) = \mathbf{V}$;
(g) $V(\Diamond\alpha, w) = \mathbf{V}$ *sse para algum mundo v em $\mathfrak{M}$*, $V(\alpha, v) = \mathbf{V}$.

As primeiras cinco cláusulas dessa definição, de (a) a (e), que se ocupam dos operadores clássicos, são as mesmas de nossa definição de valoração (compare com a definição 9.2). A única diferença é o parâmetro adicional se referindo a um mundo. Ou seja, uma fórmula não é verdadeira simplesmente, mas verdadeira *em um mundo*. Com relação às cláusulas para $\Box$ e $\Diamond$, agora, vemos que o valor de uma fór-

mula $\Box\alpha$ ou $\Diamond\alpha$ no mundo w depende do valor que α tiver também nos outros mundos.

Tendo definido quando uma fórmula α é verdadeira em um mundo, podemos então dizer que:

Definição 18.2 *Uma fórmula α é verdadeira em um modelo de mundos possíveis $\mathfrak{M} = \langle W, V \rangle$ sse para todo $w \in W$, $V(\alpha, w) = \mathbf{V}$. Dizemos que α é válida sse para todo modelo $\mathfrak{M}$, α é verdadeira em $\mathfrak{M}$.*

A partir dessa definição de validade, podemos demonstrar alguns princípios válidos em lógica modal — ou, para ser mais preciso, na lógica modal acima caracterizada, que é um dos sistemas originais de C. I. Lewis, denominado **S5**. Por exemplo, fica fácil mostrar que o esquema

$$\Box\alpha \to \alpha$$

é válido. Suponhamos que não fosse — alguma instância sua, $\Box A \to A$, por exemplo, deveria ser, então, falsa em algum mundo w de algum modelo. Como se trata de uma implicação, podemos inferir que, nesse mundo w, $V(\Box A, w) = \mathbf{V}$, e $V(A, w) = \mathbf{F}$. Mas de $V(\Box A, w) = \mathbf{V}$ concluímos que A é verdadeira em *todos* os mundos, incluindo w. Logo, $V(A, w) = \mathbf{V}$, e temos uma contradição. Portanto, $\Box\alpha \to \alpha$ é válida.

É claro, há muitas fórmulas, nas quais ocorrem operadores modais, que são inválidas. Por exemplo, o esquema $\alpha \to \Box\alpha$ não é válido: mesmo sendo α verdadeira, não se segue que seja necessariamente verdadeira. Também a fórmula

$$(\Diamond\alpha \land \Diamond\beta) \to \Diamond(\alpha \land \beta)$$

é inválida. Pode ser que α seja possível, e que β seja possível — mas não as duas coisas juntas, como você pode ver pela instância falsa abaixo, trocando α por A e β por $\neg A$:

$$(\Diamond A \land \Diamond\neg A) \to \Diamond(A \land \neg A).$$

18.3.3 O sistema S5

Para você ter uma idéia melhor de como as coisas funcionam em lógicas modais, vamos apresentar mais detalhadamente o sistema **S5**, e provar alguns de seus teoremas.

A apresentação usual de um sistema de lógica modal é feita de maneira axiomática, tomando-se como base a lógica clássica (por exemplo, o cálculo proposicional clássico, como estamos fazendo aqui), e acrescentando a isso axiomas e regras próprios para os operadores modais $\Diamond$ e $\Box$. No caso de **S5**, temos os seguintes esquemas de axiomas:

LP. α, onde α é uma tautologia qualquer.
Df$\Diamond$. $\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$
K. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
T. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$
5. $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

e, como regras de inferência, as regras de *modus ponens* e necessitação:

MP. $\vdash \alpha, \vdash \alpha \rightarrow \beta \ / \vdash \beta$
RN. $\vdash \alpha \ / \vdash \Box\alpha$

A regra MP já é nossa conhecida desde os capítulos sobre dedução natural. Quanto a RN, trocando em palavras, essa regra diz que se α foi demonstrada como teorema, então $\Box\alpha$ também é um teorema. Essa restrição da aplicação da regra — só pode ser aplicada a *teoremas* — é absolutamente imprescindível, caso contrário, estaríamos cometendo o erro de inferir, por exemplo, de 'João é estudante', a sentença 'Necessariamente, João é estudante'.

Você pode agora observar a diferença entre uma apresentação axiomática de um sistema lógico, como esta acima, e aquela feita anteriormente para o $\mathbf{CQC}_f^=$ por meio de regras de dedução. Aqui, temos um conjunto de esquemas de axiomas, e apenas duas regras. Claro, LP (de 'lógica proposicional') é um superaxioma que nos permite introduzir a qualquer momento, em uma prova, qualquer instância de uma tautologia clássica. Mas como o conjunto das tautologias clássicas é decidível, como vimos, não há problema em identificar o que é um axioma ou não. Para dar apenas um exemplo, o esquema $\alpha \vee \neg\alpha$ é uma tautologia. Assim, podemos escrever numa prova qualquer uma das fórmulas abaixo relacionadas, justificando tal inserção pelo uso de LP:

$$A \vee \neg A$$
$$\Box A \vee \neg \Box A$$
$$\Diamond(A \to B) \vee \neg \Diamond(A \to B)$$

Todas elas são instâncias da mesma tautologia, $\alpha \vee \neg \alpha$.

Vamos, então, demonstrar alguns teoremas de **S5**, começando por um denominado $T^{\Diamond}$, a saber, $A \to \Diamond A$. (Para simplificar, vamos provar teoremas, em vez de esquemas de teoremas, como $\alpha \to \Diamond \alpha$. Faremos, porém, uso tácito de teoremas já demonstrados como se tivéssemos provado os esquemas correspondentes.)

1.	$\Box\neg A \to \neg A$	T
2.	$(\Box\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\Box\neg A)$	LP
3.	$A \to \neg\Box\neg A$	1,2 MP
4.	$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$	Df$\Diamond$
5.	$(\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A) \to (\neg\Box\neg A \to \Diamond A)$	LP
6.	$\neg\Box\neg A \to \Diamond A$	4,5 MP
7.	$(A \to \neg\Box\neg A) \to ((\neg\Box\neg A \to \Diamond A) \to (A \to \Diamond A))$	LP
8.	$(\neg\Box\neg A \to \Diamond A) \to (A \to \Diamond A)$	3,7 MP
9.	$A \to \Diamond A$	6,8 MP

Vamos conversar um pouco sobre essa prova. Na linha 1 temos uma instância do axioma T, usando $\neg A$ no lugar de α. Pulando primeiro para a fórmula da linha 3, note que ela corresponde a uma aplicação da nossa conhecida regra de contraposição à linha 1 — o que geraria $\neg\neg A \to \neg\Box\neg A$, seguida de uma aplicação de eliminação de dupla negação — tendo $A \to \neg\Box\neg A$ como resultado. Como não temos nem a contraposição, nem a dupla negação como regras dessa apresentação axiomática de **S5**, o jeito foi remediar isto usando MP com as fórmulas das linhas 1 e 2. Essa última, se você observar bem, é uma instância da seguinte tautologia:

$$(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha),$$

que é uma variante da contraposição. Do mesmo modo, se tivéssemos BC à disposição como regra de inferência, poderíamos ter passado da

linha 4 diretamente à linha 6. Finalmente, se tivéssemos silogismo hipotético, poderíamos ter passado das linhas 3 e 6 diretamente à linha 9.

Para simplificar um pouco as demonstrações seguintes, vamos introduzir uma regra derivada em **S5**, a *Regra da Lógica Proposicional*, cuja formulação é a seguinte:

RLP. $\vdash \alpha_1, \ldots, \vdash \alpha_n \ / \ \vdash \beta$, se β é conseqüência tautológica de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Isto é, podemos escrever, numa nova linha em uma demonstração, qualquer fórmula β que seja conseqüência tautológica de outras fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ que apareçam anteriormente na demonstração. Por exemplo, é óbvio que $A \to C$ é conseqüência tautológica de $A \to B$ e $B \to C$: é nossa velha regra de silogismo hipotético. Assim, podemos fazer o seguinte:

1. $A \to B$
2. $B \to C$
3. $A \to C$ 1,2 RLP

Para ilustrar melhor isto, vamos refazer a demonstração de $T^{\Diamond}$ usando RLP, em vez de LP e MP:

1. $\Box\neg A \to \neg A$ T
2. $A \to \neg\Box\neg A$ 1 RLP
3. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$ Df$\Diamond$
4. $A \to \Diamond A$ 2,3 RLP

A demonstração, como você pode notar, ficou bem mais curta pelo uso de RLP. A desvantagem, claro, é que os passos não são tão óbvios. Mas estou supondo que você se saiu bastante bem em dedução natural, de modo que a lógica clássica deve estar bem apreendida, e podemos nos concentrar nos aspectos modais, que são os que nos interessam aqui.

Uma outra fórmula válida em **S5** é B, i.e., $A \to \Box\Diamond A$. Para isso, já podemos ir usando teoremas anteriormente demonstrados, como $T^{\Diamond}$ acima. A prova é:

1. $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ 5
2. $A \to \Diamond A$ $T^{\Diamond}$
3. $A \to \Box\Diamond A$ 1,2 RLP

(O uso de RLP na demonstração acima, claro, foi apenas silogismo hipotético.)

Vamos agora mostrar que $\vdash \Box\Box A \to A$:

1. $\Box\Box A \to \Box A$ T
2. $\Box A \to A$ T
3. $\Box\Box A \to A$ 1,2 RLP

Bem, as demonstrações acima foram todas mais ou menos simples. Antes de passar às próximas, vamos ver mais algumas regras derivadas de **S5**, que nos simplificarão algumas coisas. Temos as seguintes:

RM. $\vdash \alpha \to \beta \;/\; \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$
RE. $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \;/\; \vdash \Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$
$RM^{\Diamond}$. $\vdash \alpha \to \beta \;/\; \vdash \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$
$RE^{\Diamond}$. $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \;/\; \vdash \Diamond\alpha \leftrightarrow \Diamond\beta$

Vou demonstrar a validade da primeira delas, deixando as outras para você como exercício. Assim, suponhamos que $\vdash \alpha \to \beta$:

1. $\alpha \to \beta$ P (teorema)
2. $\Box(\alpha \to \beta)$ 1 RN
3. $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ K
4. $\Box\alpha \to \Box\beta$ 2,3 MP

Note que é essencial supor que $\alpha \to \beta$ seja um teorema; caso contrário, não poderíamos aplicar RN para obter a linha 2.

Dispondo das regras de inferência modais derivadas como as acima, podemos provar mais alguns princípios. Por exemplo, Df$\Box$, isto é, $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$, que é o análogo do nosso esquema de axioma Df$\Diamond$.

1. $\Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg A$ Df$\Diamond$
2. $\Box\neg\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ 1 RLP
3. $A \leftrightarrow \neg\neg A$ LP
4. $\Box A \leftrightarrow \Box\neg\neg A$ 3 RE
5. $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ 2,4 RLP

Como mais um exemplo, vamos agora demonstrar $5^\Diamond$, $\Diamond\Box A \to \Box A$.

1.	$\Diamond\Box A \leftrightarrow \neg\Box\neg\Box A$	Df$\Diamond$
2.	$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	Df$\Box$
3.	$\Diamond\neg A \to \neg\Box A$	2 RLP
4.	$\Box(\Diamond\neg A \to \neg\Box A)$	3 RN
5.	$\Box(\Diamond\neg A \to \neg\Box A) \to (\Box\Diamond\neg A \to \Box\neg\Box A)$	K
6.	$\Box\Diamond\neg A \to \Box\neg\Box A$	4,5 RLP
7.	$\Diamond\Box A \to \neg\Box\Diamond\neg A$	1,6 RLP
8.	$\Diamond\neg A \to \Box\Diamond\neg A$	5
9.	$\neg\Box\Diamond\neg A \to \neg\Diamond\neg A$	8 RLP
10.	$\Diamond\Box A \to \neg\Diamond\neg A$	7,9 RLP
11.	$\Diamond\Box A \to \Box A$	2,10 RLP

E para encerrar essa série de exemplos, o princípio denominado de 4, isto é, $\Box A \to \Box\Box A$:

1.	$\Box A \to \Diamond\Box A$	$T^\Diamond$
2.	$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$	5
3.	$\Box A \to \Box\Diamond\Box A$	1,2 RLP
4.	$\Diamond\Box A \to \Box A$	$5^\Diamond$
5.	$\Box(\Diamond\Box A \to \Box A)$	4 RN
6.	$\Box(\Diamond\Box A \to \Box A) \to (\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A)$	K
7.	$\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	5,6 MP
8.	$\Box A \to \Box\Box A$	3,7 RLP

Exercício 18.1 Demonstre a validade das regras de inferência RE, $RM^\Diamond$, e $RE^\Diamond$.

Exercício 18.2 Demonstre que as fórmulas abaixo são válidas no sistema **S5**. (Os nomes pelos quais algumas delas são conhecidas encontram-se ao lado.)

(a) $\Box A \to \Diamond A$ [D]
(b) $\Diamond\Box A \to A$ [$B^\Diamond$]
(c) $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$ [$4^\Diamond$]
(d) $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ [M]
(e) $\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$ [C]

(f) $\Diamond A \vee \Diamond B \to \Diamond(A \vee B)$ [C$^\Diamond$]
(g) $\Diamond(A \vee B) \to (\Diamond A \vee \Diamond B)$ [M$^\Diamond$]
(h) $\Box A \vee \Box B \to \Box(A \vee B)$
(i) $\Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
(j) $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ [G]

18.3.4 Outros sistemas aléticos

Eu disse acima que com **S5** temos uma lógica modal — existem, porém, muitas outras, cada uma delas dando conta de um conceito diferente de necessidade. Como no caso de **S5**, os sistemas são apresentados axiomaticamente, escolhendo-se como axiomas alguns dos princípios que demonstramos na subseção anterior. Há, porém, um núcleo básico que caracteriza uma lógica modal alética *normal*, que consiste em Df$\Diamond$, K e RN (além, claro, de PL e MP). Se tivermos apenas esses axiomas e regras, temos, então, a mais fraca das lógicas modais normais, cujo nome é **K**. Sistemas mais fortes podem ser obtidos acrescentando-se a **K** um ou mais dos princípios (como T, 4 etc.) acima mencionados. A mais forte das lógicas que podemos obter a partir destes princípios é **S5**, que pode ser axiomatizado acrescentando-se a **K** os esquemas T e 5 (é o que fizemos).

Entre os sistemas mais conhecidos de lógica modal alética temos, além de **K** e **S5**, os seguintes:

KD	= **K** + D
T	= **K** + T
B	= **T** + B
S4	= **T** + 4
S4.2	= **S4** + G

Claro que, na medida em que temos diferentes sistemas, temos diferentes conjuntos de fórmulas válidas. Por exemplo, podemos querer uma lógica em que o princípio 4, $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ não seja válido. Uma vez que fórmulas válidas são aquelas verdadeiras em todos os modelos, temos que alterar a definição de um modelo, ou de verdade de uma fórmula em um mundo de um modelo para dar conta disto.

Como esse é um texto introdutório, não vamos entrar em muitos detalhes, mas, só para dar uma idéia, a solução de Kripke para essa

questão passa pela introdução de uma *relação de acessibilidade* entre os mundos possíveis. Isto é, uma fórmula $\Box\alpha$ não é mais verdadeira em um mundo w se α for verdadeira em *todos* os mundos, mas se α for verdadeira em todos os mundos *acessíveis a* w. Para ilustrar isso, por 'acessível' você pode entender, digamos, 'concebível'. Assim, em nosso mundo (vamos chamá-lo m_1) é possível conceber um mundo m_2 sem telefones celulares. Por outro lado, pode ser que as pessoas em m_2 não consigam imaginar um mundo *com* telefones celulares. Nessa situação, m_2 é acessível a m_1 (concebível a partir de m_1), mas não o contrário.

Assim, um modelo de mundos possíveis não é mais um par $\langle W, V\rangle$, mas um terno $\langle W, R, V\rangle$, onde R é essa relação de acessibilidade entre mundos.

Para definir, agora, validade para diferentes lógicas modais, podemos exigir diferentes condições dessa relação R de acessibilidade. Por exemplo, uma fórmula como $\alpha \to \Box\Diamond\alpha$ é válida se considerarmos os modelos onde R é *simétrica*, e inválida em outros modelos. $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ é válida se considerarmos modelos onde R é *transitiva*, mas é falsa em qualquer modelo em que isso não ocorra. E assim por diante. Dessa forma, temos semânticas para os mais variados sistemas modais — que, conforme foi mencionado, capturam diferentes noções de necessidade e possibilidade.

Para encerrar esta seção, é preciso mencionar que as lógicas modais têm sido acusadas (por exemplo, por W. Quine) de não serem lógicas verdadeiras, mas apenas formalismos interessantes, e sem maiores conseqüências. Essa é uma questão discutível e discutida. Mesmo assim, as lógicas modais (e seus desenvolvimentos, como a *lógica dinâmica*) têm tido várias aplicações interessantes, particularmente em ciências da computação (verificação de programas, para dar um exemplo).

18.4 Outras lógicas modais

Além das lógicas modais aléticas, há também outras lógicas similares, igualmente chamadas de modais. A lógica do tempo, ou também chamada lógica modal temporal, de que já falamos anteriormente, foi

desenvolvida pelo inglês Arthur Prior nos anos 50. Ela é considerada uma espécie de lógica modal, porque também consiste na adição de operadores intensionais à linguagem da lógica clássica, tendo o mesmo tipo de estrutura que uma lógica modal alética. Os operadores mais comumente usados são quatro:

P: foi o caso que ...
H: foi sempre o caso que ...
F: será o caso que ...
G: será sempre o caso que ...

Os operadores G e H são os operadores fortes, que correspondem ao $\Box$ da lógica modal alética. Os outros dois, F e P, são os operadores fracos, correspondentes a $\Diamond$. Da mesma maneira que, nas lógicas aléticas, temos, digamos, Df$\Diamond$, nas lógicas temporais vale o seguinte:

$$\mathsf{F}\alpha \leftrightarrow \neg\mathsf{G}\neg\alpha,$$
$$\mathsf{P}\alpha \leftrightarrow \neg\mathsf{H}\neg\alpha.$$

Lógicas temporais têm a mesma semântica de mundos possíveis que as lógicas aléticas; a diferença está na interpretação dos "mundos": eles são agora instantes. A relação de acessibilidade, também, torna-se uma relação temporal de anterioridade, ou seja, se y é acessível a x, então x é anterior a y. Assim, as condições de verdade para fórmulas com os operadores temporais fica como abaixo:

- $\mathsf{G}\alpha$ é verdadeira em um instante t sse α é verdadeira em todos os instantes posteriores a t;
- $\mathsf{H}\alpha$ é verdadeira em um instante t sse α é verdadeira em todos os instantes anteriores a t;
- $\mathsf{F}\alpha$ é verdadeira em um instante t sse α é verdadeira em algum instante posterior a t;
- $\mathsf{P}\alpha$ é verdadeira em um instante t sse α é verdadeira em algum instante anterior a t.

Em termos de apresentação de sistemas, faz-se como no caso da lógica modal alética, por meio da adição de novos axiomas e regras de

inferência a uma base axiomática para a lógica clássica. As combinações dos vários axiomas temporais procuram sistematizar diferentes maneiras de ver o tempo: o tempo pode ser considerado linear, com começo, sem começo, com fim, sem fim, transitivo, discreto, denso, ramificado à direita, ramificado à esquerda, circular, contínuo etc. Para cada uma dessas concepções sobre o tempo podemos ter então uma lógica — certos princípios valem, ou deixam de valer.

Para dar um exemplo, suponhamos que tomássemos o sistema alético **S5**, e trocássemos as ocorrências de $\Box$ por G e de $\Diamond$ por F. (Vamos ficar apenas com os operadores para o futuro, para simplificar.) As seguintes leis, entre outras, valeriam nesta lógica:

$$\mathsf{G}\alpha \to \alpha$$
$$\mathsf{F}\alpha \to \mathsf{GF}\alpha$$

Ambas parecem muito estranhas: se α será sempre verdadeira, significa que já é verdadeira agora? Se α vai ser alguma vez verdadeira, será sempre o caso que α vai ser verdadeira no futuro? Mas note que a estranheza desaparece, se imaginarmos que o tempo, em vez de ser uma linha reta sem começo nem fim, seja uma circunferência. Nesta visão (adotada por algumas culturas: pense na Índia, por exemplo), se α é verdadeira em todos os instantes do futuro, então é verdadeira agora, pois agora é parte do futuro (bem longe, no virar do círculo).

Assim, nossa versão temporal de **S5** é uma lógica para o tempo circular (há outras: ver, por exemplo, Prior, 1967). Para ter lógicas adequadas a uma estrutura não-circular do tempo, claro, $\mathsf{G}\alpha \to \alpha$ não pode ser válida. E assim por diante.

Um outro tipo de lógica modal são as lógicas *epistêmicas*. Nesse caso, temos um operador K, significando 'sabe-se que', ou B, 'acredita-se que'. Analogamente, temos lógicas *deônticas*, com um operador O significando 'é obrigatório que', por exemplo. Como as lógicas do tempo, todas essas lógicas são chamadas modais porque, fundamentalmente, o que fazem é adicionar operadores intensionais à lógica clássica. Todas estas lógicas têm semânticas de mundos possíveis, e os sistemas são apresentados da mesma maneira. As diferenças vão estar nos símbolos usados para os operadores (como $\Box$, G, K, O), e nos princípios que valem em uns casos, e não em outros. Por exemplo,

assim como $\Box\alpha \to \alpha$ é válida em muitas lógicas aléticas, $\mathsf{K}\alpha \to \alpha$ vale em lógica epistêmica (se α é sabida, então é verdadeira). Por outro lado, os equivalentes temporais e deônticos disso, $\mathsf{G}\alpha \to \alpha$, e $\mathsf{O}\alpha \to \alpha$, são usualmente inválidos: se será sempre o caso que α, isso não significa que α é verdadeira *agora* — exceto, como vimos, se o tempo for circular. Analogamente, ainda que α seja obrigatória, isso não implica que seja automaticamente verdadeira, já que nem todos cumprem suas obrigações.

Basicamente, então, podemos dizer que temos apenas um tipo de sistema modal, envolvendo um ou mais operadores como $\Box$; a diferença está em como o interpretamos: necessidade lógica (alética), temporal, epistêmica, deôntica, e assim por diante.

18.5 Lógicas alternativas

As lógicas alternativas, também chamadas de *heterodoxas*, partem do princípio de que a lógica clássica está errada e precisa ser substituída — ao menos, algumas coisas nela precisam. Entre as lógicas alternativas mais conhecidas, temos as lógicas polivalentes, a lógica intuicionista, as lógicas relevantes, paraconsistentes, livres, e outras mais. Para ilustrá-las um pouco, vamos conversar brevemente sobre as lógicas polivalentes, a lógica intuicionista e as lógicas relevantes.

18.5.1 Lógicas polivalentes

Como o nome diz, lógicas polivalentes admitem mais de dois valores de verdade; conseqüentemente, vamos ter uma rejeição do princípio clássico da bivalência. As lógicas polivalentes surgiram, de modo independente, com os trabalhos do lógico polonês Jan Łukasiewicz, a partir de 1920, e de Emil Post (1921). A motivação filosófica que levou Łukasiewicz a propor lógicas polivalentes (inicialmente uma lógica trivalente e, mais tarde, com mais valores) foi o problema dos assim chamados "futuros contingentes" — mais precisamente, a questão de se o princípio de bivalência implicaria o determinismo e, portanto, a não-existência do livre arbítrio.

Consideremos o seguinte exemplo:

Cezar Mortari estará em Tübingen no Natal do próximo ano.

De acordo com o princípio de bivalência, a proposição expressa pela sentença acima deve ser verdadeira ou falsa. Agora, se verdadeira, o que ela afirma corresponde aos fatos; assim, CM terá inevitavelmente que estar em Tübingen no Natal do próximo ano. Se ela for falsa, parece então que é impossível que CM esteja em Tübingen no Natal do próximo ano. Como a proposição em questão deve ser verdadeira ou falsa, é ou necessário que CM esteja em Tübingen no Natal do próximo ano, ou impossível que ele esteja. Em qualquer caso, o futuro está predeterminado, e nada há que se possa fazer quanto a isso.

O argumento acima (apresentado de forma muito resumida) já era conhecido de Aristóteles, que se ocupou dele em *Sobre a interpretação*. Ao contrário dos estóicos, que eram deterministas, Aristóteles não gostou da conclusão do argumento e, aceitando sua validade, pensou em uma possível rejeição do princípio de bivalência. Por outro lado, Aristóteles tentou mesmo assim manter o princípio do terceiro excluído. O que, na verdade, não é possível, pois os outros princípios, tomados em conjunto, implicam a bivalência.

O que Łukasiewicz, que também aceitava a validade desse argumento, propôs como solução para o problema é uma lógica trivalente, rejeitando tanto o princípio de bivalência quanto o do terceiro excluído. A idéia é ter, além de **V** e **F**, um terceiro valor, **I**, que poderia ser considerado como o *indeterminado*. Note que essa indeterminação é *ontológica*, e não *epistemológica*. Isto é, uma proposição com valor **I** não é, de fato, nem verdadeira nem falsa — ao contrário do caso em que uma proposição é verdadeira (ou falsa), só que não sabemos qual das alternativas é a correta.

Para ter uma idéia, na figura 18.2 você encontra as matrizes que caracterizam os operadores da lógica trivalente de Łukasiewicz. Esses operadores ainda são funções de verdade, ao contrário dos operadores modais: a diferença é que eles são funções de verdade *trivalentes*.

Olhando as matrizes, é fácil ver que $\alpha \vee \neg\alpha$ não é válida: quando α recebe o valor **I**, o valor de $\neg\alpha$ também é **I**, e o valor de $\alpha \vee \neg\alpha$ será igualmente **I**. Como fórmulas válidas são definidas como aquelas que sempre têm valor **V**, $\alpha \vee \neg\alpha$ não é válida.

Por outro lado, $\alpha \to \alpha$ é válida: mesmo quando α tem o valor **I**,

α	$\neg\alpha$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

$\alpha \to \beta$ (α \ β)	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**V**	**V**	**I**
F	**V**	**V**	**V**

$\alpha \vee \beta$ (α \ β)	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**V**	**V**
I	**V**	**I**	**I**
F	**V**	**I**	**F**

$\alpha \wedge \beta$ (α \ β)	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

FIGURA 18.2 — Matrizes para a lógica trivalente de Łukasiewicz.

vemos que o valor de $\alpha \to \alpha$ é **V**. Isso não acontece, por exemplo, na lógica trivalente de Kleene (cf. Kleene, 1952), em que $\alpha \to \alpha$ recebe o valor **I** quando o valor de α é **I**, conforme verificamos na figura abaixo.

α	$\neg\alpha$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

$\alpha \to \beta$ (α \ β)	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**V**	**I**	**I**
F	**V**	**V**	**V**

FIGURA 18.3 — Matrizes para a lógica trivalente de Kleene.

Na lógica trivalente de Kleene, o valor **I** não é o indeterminado, como em Łukasiewicz, mas o *matematicamente indecidível.* A lógica de Kleene, a propósito, não tem fórmulas válidas, como é fácil verificar: quando todas as variáveis proposicionais em uma fórmula têm o valor **I**, a fórmula como um todo recebe também **I**, e portanto não é válida. Assim, uma das maneiras anteriormente mencionadas para caracterizar uma lógica (um conjunto de fórmulas válidas) não funciona para a lógica trivalente de Kleene.

Mas voltemos à lógica de Łukasiewicz. Dos três valores, **V** é o *valor designado*, i.e., aquele que corresponde ao verdadeiro. Se dissermos agora que uma fórmula é válida sse tem o valor designado para qualquer valor de suas variáveis, obteremos um conjunto de tautologias trivalentes que caracterizam a lógica Ł3 de Łukasiewicz. Como vimos, $A \vee \neg A$ não é um teorema dessa lógica, mas outras coisas falham também. Você se recorda de que na lógica clássica podíamos

definir os operadores uns em função dos outros. Por exemplo, temos que

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta).$$

Contudo, é fácil ver que essas fórmulas não são logicamente equivalentes em Ł3. Vamos construir uma tabela onde, por exemplo, apareçam $A \to B$ e $\neg A \vee B$. Como temos duas letras sentenciais, nossa tabela não terá quatro linhas, como na lógica bivalente, onde o número de linhas l é igual a 2^n. Aqui, como temos três valores, o número de linhas é igual a 3^n. (Em uma lógica tetravalente teríamos 4^n, e assim por diante.) Logo, nossa tabela terá $3^2 = 9$ linhas. O resto é como usualmente:

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \vee B$
V	**V**	**F**	**V**	**V**
I	**V**	**I**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**I**	**F**	**I**	**I**
I	**I**	**I**	**V**	**I**
F	**I**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
I	**F**	**I**	**V**	**I**
F	**F**	**V**	**V**	**V**

Como você pode ver, nas linhas 5 e 8 a fórmula $A \to B$ tem valor **V**, mas $\neg A \vee B$ tem **I**. O resultado é que, enquanto $\neg A \vee B$ implica logicamente $A \to B$, o inverso não ocorre. Logo, não podemos definir $\to$ por meio de $\neg$ e $\vee$.

Por outro lado, ainda vale a definição de $\alpha \leftrightarrow \beta$ como $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$. Além disso, podemos definir $\vee$ por meio de $\to$ da seguinte maneira: $(\alpha \to \beta) \to \beta$. Você pode conferir e verificar que essa fórmula é logicamente equivalente em Ł3 a $\alpha \vee \beta$. Finalmente, podemos definir $\alpha \wedge \beta$ como $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Ł3 não foi axiomatizada por Łukasiewicz, mas por M. Wajsberg em 1931. O conjunto de axiomas (esquemas) é o seguinte:

$$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$$
$$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$$
$$((\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha) \to \alpha$$

A única regra de inferência primitiva é *modus ponens*.

Além de sua lógica trivalente $\L_3$, Łukasiewicz apresentou depois uma lógica tetravalente e, de um modo geral, para cada número natural n, uma lógica n-valente $\L_n$. Finalmente, ele introduziu uma lógica com infinitos valores de verdade — uma lógica infinitovalente, em que cada número real do intervalo $[0, 1]$ é um valor. Uma tal lógica poderia ter, por exemplo, uma interpretação probabilística: dizer que A tem o valor $0,85$ é dizer que A é verdadeira com probabilidade 85%.

Outros autores também se ocuparam de lógicas polivalentes (já mencionamos Post e Kleene), e muitos outros sistemas foram apresentados. As aplicações mais interessantes de lógicas polivalentes, hoje em dia, são na área de computação, como por exemplo o tratamento de informação em condições de incerteza. A esse respeito, vale lembrar a lógica difusa (*fuzzy logic*) de L. Zadeh (ver, por exemplo, Haack, 1978, cap. 11).

Exercício 18.3 Usando tabelas de verdade trivalentes, determine quais das seguintes fórmulas são válidas em $\L_3$:

(a) $A \vee \neg A$

(b) $(A \to \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \to A)$

(c) $\neg(A \wedge \neg A)$

(d) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$

(e) $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

(f) $(A \vee \neg A) \to (\neg\neg A \to A)$

(g) $(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$

(h) $\neg((\neg A \to \neg B) \to \neg B) \to (A \wedge B)$

(i) $\neg((\neg A \to \neg B) \to \neg B) \to (A \vee B)$

18.5.2 Lógica intuicionista

A lógica intuicionista é a lógica da matemática intuicionista, e o intuicionismo, uma corrente dentro da matemática originada por L. E. J. Brouwer (1881–1966). A diferença entre os matemáticos clássicos e os intuicionistas com relação à matemática poderia ser colocada, ainda que um tanto grosseiramente, como a diferença entre

descobrir e inventar. Um matemático clássico — também chamado *platonista* — considera que os objetos matemáticos existem independentemente dos seres humanos; nesse sentido, a atividade de um matemático consiste em descobrir que propriedades têm estes objetos, que leis valem a respeito deles etc. Para fazer uma analogia, é como se existisse um "país da matemática", e a tarefa do matemático fosse similar à de um geógrafo que estudasse a topografia desse país.

Para um intuicionista, contudo, os objetos matemáticos vão sendo criados pelos seres humanos: a matemática é uma atividade mental, e os objetos matemáticos são construções mentais; eles não existem de maneira independente. Assim, um intuicionista só considera demonstrada a existência de algum objeto matemático se houver um método para construí-lo. Por exemplo, é fácil mostrar que há algum número natural maior do que mil: basta iniciar de zero e ir somando um a cada número obtido; desta forma, podemos construir o número 1001, que é maior que mil. (Conjuntos infinitos como o dos números naturais, a propósito, existem, mas não de uma maneira acabada, realizada: eles existem potencialmente: sempre podemos obter um novo número natural, por exemplo.)

Por outro lado, na matemática clássica, demonstra-se que muitas coisas existem porque sua inexistência implicaria uma contradição. Para mostrar que existe um objeto com uma certa propriedade $\mathbf{P}$ — i.e., $\exists x\mathbf{P}x$ — supõe-se que esse objeto não exista, e prova-se que essa hipótese, $\neg\exists x\mathbf{P}x$, implica uma contradição. Logo, por redução ao absurdo, conclui-se que $\neg\neg\exists x\mathbf{P}x$ e, aplicando-se dupla negação, $\exists x\mathbf{P}x$.

Um intuicionista não aceita esse tipo de demonstração, pois ela não dá um método de construção do objeto. Assim, uma das coisas que a lógica intuicionista rejeita é o princípio de dupla negação: $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ não é válida intuicionisticamente.

Antes de falar propriamente da lógica intuicionista, deve-se mencionar que sua posição quanto aos objetivos da lógica é diferente da usual. Enquanto se imagina que a lógica serve de fundamento para qualquer disciplina, incluindo a matemática, podendo ser aplicada a qualquer assunto, a visão intuicionista é de que a lógica apenas resume os esquemas de raciocínio utilizados na matemática. Nesse sentido, a matemática seria mais fundamental que a lógica, e não o contrário.

Para os intuicionistas, então, a verdade de uma proposição (matemática) deve ser estabelecida por meio de uma prova construtiva dessa proposição. Em vista disso, o significado dos operadores difere também do significado que eles têm na lógica clássica. No intuicionismo, temos, por exemplo, uma interpretação deles em termos de provas:

- uma prova de $A \wedge B$ é qualquer coisa que seja uma prova de A e de B;
- uma prova de $A \vee B$ é uma prova de A, ou de B, ou algo que permita obter uma prova de um deles;
- uma prova de $A \rightarrow B$ é uma construção que, aplicada a uma prova de A, gera uma prova de B;
- uma prova de $\neg A$ é uma prova de que $A \rightarrow \bot$, onde $\bot$ é uma constante denotando uma proposição logicamente falsa, o absurdo. (Os intuicionistas consideram $\neg A$ uma abreviação de $A \rightarrow \bot$.)

A partir dessa interpretação intuitiva acima esboçada, pode-se mostrar que certas leis não valem (ou valem) na lógica intuicionista. Pode-se mostrar que $\alpha \vee \neg\alpha$ não pode ser válida, pois isso significaria que podemos sempre achar um método para resolver qualquer problema matemático: teríamos que obter ou uma prova de α, ou de $\neg\alpha$. Contudo, tomemos como exemplo a famosa *conjectura de Goldbach*, que diz que todo número par é igual à soma de dois números primos ímpares. Representando por G essa proposição, temos que dizer que, até hoje, ninguém foi capaz de provar nem G, nem $\neg$G. Assim, como não estamos em condições de afirmar que há uma prova de um ou outro, não podemos afirmar que $G \vee \neg G$. Portanto, essa fórmula é um contra-exemplo para $\alpha \vee \neg\alpha$, que não pode então ser considerada válida.

Por outro lado, é fácil demonstrar que $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ é intuicionisticamente válida, pois $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ implica uma contradição. A partir disso, como então $\neg\neg(G \vee \neg G)$ é verdadeira, e $G \vee \neg G$ é falsa, temos que

$$\neg\neg(G \vee \neg G) \rightarrow (G \vee \neg G)$$

é falsa. Mas essa fórmula, então, é um contra-exemplo para $\neg\neg\alpha \to \alpha$ (usando $\alpha = G \vee \neg G$). Assim, o princípio da dupla negação é também inválido. Curiosamente, ele vale na outra direção: é intuicionisticamente válido que $\alpha \to \neg\neg\alpha$. Mais ainda, podemos demonstrar que $\neg\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ é um teorema da lógica intuicionista.

Vale a pena mencionar também que certas equivalências que temos na lógica clássica, como, por exemplo,

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$$
$$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$
$$(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \to \neg\beta)$$

não valem intuicionisticamente. Ou seja, os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\to$ são todos independentes. Além disso, pode-se demonstrar que esses operadores, na lógica intuicionista, não são funções de verdade.

Não vou apresentar aqui uma semântica para a lógica intuicionista (uma maneira de fazê-lo é utilizando modelos de mundos possíveis), mas tão-somente uma noção sintática de conseqüência lógica. Se tomarmos as dez regras — as primitivas, *não* as derivadas — para os operadores que vimos em dedução natural (deixando de lado os quantificadores) e substituirmos a regra de dupla negação (DN) pela seguinte:

$$\frac{\neg\alpha}{\alpha \to \beta}$$

teremos um sistema que gera o conjunto de teoremas da lógica intuicionista **I**. Essa regra pode ser chamada de DS (por causa da lei de Duns Scot, $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$).

Note que falei acima de regras primitivas. Algumas das que são derivadas no **CQC** não são admissíveis na lógica intuicionista. Por exemplo, nem todas as leis de De Morgan valem, e nem dupla negação nem contraposição são reversíveis. No caso de contraposição, $\neg\beta \to \neg\alpha$ não implica logicamente $\alpha \to \beta$. A outra direção vale, contudo. Ou seja, $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ é um teorema de **I**.

Por outro lado, é fácil ver que $\neg\neg A \to A$ não é um teorema. Ainda que tomássemos $\neg\neg A$ como hipótese para RPC, não conseguiríamos nos livrar da dupla negação. Você poderia imaginar que bastaria, então, supor $\neg A$ como hipótese para RAA e, tendo uma contradição,

derivar A. Mas note que isso não funciona: a regra de RAA tem como saída a *negação da hipótese*: se você supôs $\neg A$, o resultado será $\neg\neg A$. Mas isso você já tem, e continuamos sem eliminar a dupla negação.

Curiosamente, porém, $\neg\neg(\neg\neg A \to A)$, ou seja, a dupla negação de $\neg\neg A \to A$, é um teorema de **I**. Veja:[2]

1.	$\neg(\neg\neg A \to A)$	H (RAA)
2.	A	H (RAA)
3.	$\neg\neg A \to A$	2 Pref
4.	$(\neg\neg A \to A) \wedge \neg(\neg\neg A \to A)$	1,3 C
5.	$\neg A$	2–4 RAA
6.	$\neg A$	H (RAA)
7.	$\neg\neg\neg A$	6 DN
8.	$\neg\neg A \to A$	7 DS
9.	$(\neg\neg A \to A) \wedge \neg(\neg\neg A \to A)$	1,8 C
10.	$\neg\neg A$	6–9 RAA
11.	$\neg A \wedge \neg\neg A$	5,10 C
12.	$\neg\neg(\neg\neg A \to A)$	1–10 RAA

De fato, podemos provar que, se α é uma tautologia clássica, $\neg\neg\alpha$ será intuicionisticamente válida. Além disso, se $\neg\alpha$ é tautologia, também é intuicionisticamente válida. Finalmente, vale a pena notar que, se acrescentarmos à lógica intuicionista $\alpha \vee \neg\alpha$ como teorema (ver item (f) do exercício abaixo), temos também $\neg\neg\alpha \to \alpha$, e o sistema fica equivalente à lógica proposicional clássica.

Exercício 18.4 Demonstre, na lógica intuicionista **I**, os seguintes teoremas:

(a) $A \to \neg\neg A$
(b) $\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$
(c) $\neg(A \wedge \neg A)$
(d) $\neg\neg(A \vee \neg A)$
(e) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(f) $(A \vee \neg A) \to (\neg\neg A \to A)$
(g) $(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$
(h) $(A \to \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

---

[2] Para simplificar, essa demonstração faz uso na linha 3 de uma regra derivada, prefixação (Pref), que vale tanto na lógica clássica quanto na intuicionista: α / $\beta \to \alpha$.

18.5.3 Lógicas relevantes

Assim como a lógica modal surgiu em razão de uma preocupação com os "paradoxos" da implicação material, logo em seguida descobriu-se que a implicação estrita, desenvolvida por Lewis, também apresenta alguns "paradoxos". As seguintes fórmulas são válidas nas lógicas modais normais (recorde que $\prec$ representa a implicação estrita):

$$\Box\alpha \prec (\beta \prec \alpha),$$
$$\neg\Diamond\alpha \prec (\alpha \prec \beta),$$

ou seja, traduzindo para o português, uma proposição necessária é implicada estritamente por qualquer proposição, e uma proposição impossível implica qualquer proposição. O que, mais uma vez, parece muito estranho.

O próprio Lewis, que estava consciente desse problema, achava que afinal as coisas não eram tão ruins assim. Uma vez que entendamos a implicação como o inverso da dedutibilidade, isto é

α implica β se e somente se β é dedutível de α,

a idéia de que uma premissa impossível implica estritamente qualquer coisa (ou seja, podemos deduzir qualquer coisa de uma premissa impossível) não parece tão estranha. Considere a dedução seguinte, onde uma premissa impossível deduz uma conclusão arbitrária:

1.	$\alpha \wedge \neg\alpha$	P	[premissa impossível]
2.	α	1 S	
3.	$\alpha \vee \beta$	2 E	
4.	$\neg\alpha$	1 S	
5.	β	3,4 SD	[conclusão arbitrária]

Já para A. R. Anderson e N. Belnap, os fundadores da lógica relevante, o problema está justamente nessa noção de dedutibilidade que se tem na lógica clássica (e nas lógicas modais usuais). Eles sugerem que deveríamos dizer que β é dedutível de α se e somente se a derivação de β realmente usa α, e não apenas faz um desvio passando por α. Ou seja, provar β sob a hipótese de que α é diferente de provar β a partir de α.

Para construir as lógicas relevantes, Anderson e Belnap apresentaram uma nova caracterização de dedutibilidade, utilizando-se de *índices* em cada fórmula que aparece em uma dedução. O exemplo a seguir mostra como deduzir $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ de $A \rightarrow (B \rightarrow C)$:

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)_{\{1\}}$	P $\quad ?B \rightarrow (A \rightarrow C)$
2.	$\mid B_{\{2\}}$	H $\quad ?A \rightarrow C$
3.	$\mid \; \mid A_{\{3\}}$	H $\quad ?C$
4.	$\mid \; \mid B \rightarrow C_{\{1,3\}}$	1,3 MP
5.	$\mid \; \mid C_{\{1,2,3\}}$	2,4 MP
6.	$\mid A \rightarrow C_{\{1,2\}}$	3–5 RPC
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)_{\{1\}}$	2–6 RPC

Cada premissa e cada hipótese introduzida recebe um novo conjunto de índices. Se derivamos uma fórmula a partir de outras — como na linha 4, onde $B \rightarrow C$ foi deduzida de $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, que tem índice $\{1\}$, e de A, que tem índice $\{2\}$ — a nova fórmula recebe como índice a união dos índices das outras. No caso, $B \rightarrow C$ recebeu índice $\{1, 2\}$. A restrição na regra de prova condicional (RPC), aplicada por exemplo na linha 6, e que introduz a implicação, é que o índice do antecedente — $\{3\}$ — deve estar contido no índice do conseqüente — $\{1, 2, 3\}$. O índice da implicação resultante é a diferença entre os dois.

É fácil agora ver que os paradoxos da implicação material não são válidos na lógica relevante. Vamos tomar $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ como exemplo. A dedução seguinte mostra como demonstrar esta fórmula na lógica clássica. (Para simplificar, usei na linha 3 uma regra de inferência derivada, a regra de repetição.)

1.	$\mid A$	H $\quad ?B \rightarrow A$
2.	$\mid \; \mid B$	H $\quad ?A$
3.	$\mid \; \mid A$	1 R
4.	$\mid B \rightarrow A$	2–3 RPC
5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	1–4 RPC

O que acontece agora, se tentarmos repetir essa dedução na lógica relevante **R**? A dedução abaixo, iniciada mas não terminada, mostra que não temos como provar $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ em **R**:

1.	$A_{\{1\}}$	H	$?B \to A$
2.	$\quad B_{\{2\}}$	H	$?A$
3.	$\quad A_{\{1\}}$	1 R	
4.	?	não é possível continuar	

Embora a proposta básica de lógicas relevantes seja muito atraente, elas ainda não se consolidaram como alternativas fortes à lógica clássica, em razão de alguns problemas ainda não resolvidos. Por exemplo, um deles é que há vários sistemas distintos de lógica relevante, como **R**, e **E** (para *entailment*), que é a lógica da implicação relevante e necessária. Em **E** podemos definir o operador de necessidade como

$$\Box\alpha =_{df} (\alpha \to \alpha) \to \alpha.$$

Nesse caso, teríamos uma lógica que, por um lado, substitui a lógica clássica — rejeita alguns de seus princípios — e, por outro, também a estende, acrescentando operadores modais. Portanto, como indicado anteriormente, essa divisão entre lógicas complementares e alterntivas não é muito apropriada.

Um outro problema a respeito das lógicas relevantes é que um sistema relevante envolvendo todos os operadores usuais (negação, conjunção etc.) já é indecidível no nível proposicional. Por outro lado, alguns autores argumentam que a relevância das premissas para a conclusão, embora seja uma questão importante para a avaliação de um argumento, na verdade não seria um problema de lógica, mas sim um problema retórico.

Apesar das dificuldades, há algumas aplicações interessantes para lógicas relevantes; por exemplo, as lógicas relevantes são paraconsistentes, isto é:

$$\alpha, \neg\alpha \nvdash_R \beta. \quad (1)$$

Em outras palavras, a presença de uma contradição não trivializa uma teoria.[3] Assim, poder-se-ia usar uma lógica relevante para tra-

[3]Uma lógica é dita *paraconsistente* se contém um operador de negação que satisfaz a condição (1) acima. Em outras palavras, temos um sistema de lógica em que o princípio de não-contradição não é universalmente válido. A idéia de uma lógica violando o princípio de não-contradição tem o próprio Łukasiewicz entre os seus precursores, contudo, um primeiro sistema paraconsistente só apareceu com os trabalhos de S. Jaśkowski, em 1948. No entanto, as lógicas paraconsistentes, como

tar de paradoxos localizados dentro de alguma teoria. Por outro lado, podemos pensar também em aplicações em teste de teorias: quando uma teoria faz uma predição que não se verifica, por exemplo, apenas hipóteses relevantes para a predição feita serão colocadas em questão, e não a teoria inteira. Mais recentemente, uma das aplicações propostas para uso em computação envolve a lógica relevante tetravalente de Belnap.

18.6 A história mais recente

Até agora falamos um pouco das aplicações tradicionais da lógica, que seriam, basicamente, a análise da validade de argumentos, por um lado, e, por outro, a formalização de teorias científicas, particularmente teorias matemáticas. O século XX, porém, na sua segunda metade, assistiu ao surgimento e disseminação dos computadores. As primeiras aplicações não numéricas de computadores envolveram jogos (como damas) e tradução automática.

O ano de 1956 é uma data importante, pois marca o surgimento da Inteligência Artificial (IA), que poderia ser definida como a teoria e prática da construção de máquinas que tenham/simulem comportamento inteligente. Evidentemente, agentes inteligentes precisam ter conhecimento do mundo onde estão inseridos: logo, uma das pedras fundamentais do empreendimento da IA é a representação do conhecimento.

O conhecimento que agentes têm do mundo pode ser caracterizado de duas maneiras:

---

elas são hoje em dia conhecidas, surgiram apenas em 1953, independentemente de Jaśkowski, com os trabalhos do lógico brasileiro Newton C. A. da Costa. A motivação de da Costa era ter um sistema lógico que ficasse o mais próximo possível da lógica proposicional clássica, mas permitindo, contudo, que se pudesse raciocinar na presença de contradições sem trivializar um sistema. (Você se lembra da regra de contradição que vimos no capítulo sobre dedução natural: na lógica clássica, podemos deduzir *qualquer* fórmula a partir de uma contradição.) Assim, uma lógica paraconsistente permite uma distinção entre as noções de inconsistência e de trivialidade, que na lógica clássica são equivalentes.

Caso você tenha interesse nesse assunto particular, recomendo fortemente, como introdução, a leitura do livro de Newton da Costa, *Ensaio sobre os fundamentos da lógica* (da Costa, 1980).

Implícito (procedural): por exemplo, o conhecimento contido num programa para executar operações aritméticas. Esse tipo de conhecimento é difícil de modificar, mas pode ser usado de modo mais eficiente.

Explícito (declarativo): por exemplo, as informações contidas em uma tabela listando várias cidades e as distâncias entre elas.

O conhecimento declarativo — e o nome já o diz — consiste em declarações sobre o mundo. Ele é mais fácil de modificar; por outro lado, é menos eficiente. Entre outras de suas vantagens temos o fato de ser acessável/modificável pelo agente (introspecção), e os usos múltiplos: uma declaração como 'todo gato é mamífero' tanto pode ser usada para mostrar que algo é um mamífero, a partir da informação que é um gato, ou que não é gato, se soubermos que não é mamífero. (Um procedimento, ao contrário, tem sempre uma ordem de passos que deve ser seguida.)

Parece bastante claro, contudo, que não podemos optar, no fim das contas, exclusivamente por um ou outro tipo de conhecimento: agentes inteligentes provavelmente precisam de ambos os tipos para interagir de forma adequada com o ambiente.

Qual seria, então, o papel da lógica com relação a isso? Podemos ver de dois modos: de um lado, a lógica pode fornecer linguagens para representação de conhecimento, como, digamos, a linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem. De outro lado, pode fornecer ferramentas para análise, e mesmo implementação, de sistemas de IA.

Note-se que a representação de conhecimento envolve necessariamente mecanismos de inferência. Por exemplo, considere-se a sentença

A Terra gira em torno de uma estrela,

que poderia estar na base de conhecimento de algum agente. É claro que esse agente também deveria saber o conjunto infinito de proposições abaixo:

A Terra não gira em torno de duas estrelas,
A Terra não gira em torno de três estrelas etc.

Mas, é claro, não se pode colocar tudo isso na base de conhecimento de um agente, pois há sempre limitações físicas de memória. Assim, é essencial que haja um mecanismo de inferência, cuja função seja extrair conclusões a partir da informação disponível. Com relação a isso, há duas coisas importantes a considerar: a eficiência e o uso de informação parcial e/ou incerta.

18.6.1 Eficiência

Um agente que esteja inserido em algum ambiente, e interagindo com ele, necessariamente se vê obrigado a tomar decisões imediatas (ou sofrer as conseqüências de não fazê-lo). Uma outra versão do mesmo problema é enfrentada pelo usuário de algum banco de dados, que precisa ter em tempo razoável a resposta a uma questão colocada. Em ambos os casos, o que está em jogo é a eficiência dos mecanismos lógicos de inferência envolvidos no processo.

A esse respeito, temos dois problemas.

Problema 1: o cálculo de predicados de primeira ordem é indecidível. Isso significa que não há um método mecânico para determinar, num número finito de passos, e em todo e qualquer caso, se uma fórmula α é conseqüência lógica ou não de um dado conjunto de fórmulas Δ. Dito de outra forma, em alguns casos um programa para verificar se $\Delta \vdash \alpha$ não termina sua execução.

Há, porém, uma boa notícia a esse respeito: vários subconjuntos interessantes do cálculo de predicados *são* decidíveis. Por exemplo, o cálculo proposicional, o conjunto das fórmulas universais (isto é, aquelas cujos quantificadores são todos universais), e assim por diante. A má notícia é o

Problema 2: a decidibilidade do cálculo proposicional, por exemplo, é NP-completa. Isso significa mais ou menos o seguinte: os melhores algoritmos conhecidos usam tempo exponencial (2^n) em relação ao tamanho do input (n). Dando um exemplo: no caso de tabelas de verdade, se uma fórmula contém n variáveis,

a tabela terá 2^n linhas. Assim, uma tabela de verdade envolvendo 100 variáveis tem mais linhas (2^{100}) que o número de microssegundos que passaram desde o Big-Bang (supondo que cada linha pudesse ser construída em um microssegundo).

Essa situação, é claro, tem algumas conseqüências interessantes. Primeiro, estimulou a busca de métodos de inferência mais eficientes. Em segundo lugar, ultimamente temos pesquisas que apontam na direção de uma incorporação de elementos procedurais a sistemas lógicos. Finalmente, procura-se identificar subconjuntos interessantes e computacionalmente tratáveis da lógica clássica (por exemplo, a lógica de cláusulas de Horn, que é a base da linguagem de programação Prolog).

18.6.2 Informação parcial e incerteza

A lógica clássica (bem como as lógicas não-clássicas usuais) é monotônica. Isso significa que

$$\Gamma \vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \vdash \alpha.$$

Ou, dizendo de outra maneira, premissas adicionais (ou informação adicional) não alteram a validade de uma dedução. Se algo é conseqüência de um conjunto de premissas, então continua sendo conseqüência ainda que adicionemos fatos novos.

Agora, consideremos como exemplo argumentos como os seguintes:

(A3)	P_1	As aves voam.	(A4)	P_1	As aves voam.
	P_2	Tweety é uma ave.		P_2	Tweety é uma ave.
	►	Tweety voa.		P_3	Tweety é um pingüim.
				►	Tweety não voa.

O padrão de raciocínio envolvido em (A3) e (A4) é chamado de *não-monotônico*. Como se vê, a passagem de (A3) para (A4) se deu através de acréscimo de informação: o fato novo de que Tweety é um pingüim. Essa informação nova agora não mais permite que se derive a conclusão original (que Tweety voa), mas sim sua negação (que Tweety não voa).

O caso acima é um exemplo típico de raciocínio em presença de informação incompleta — um tipo de raciocínio feito a todo momento por agentes humanos. A questão que se coloca é como representar formalmente. Na lógica clássica poderíamos tentar, por exemplo, por meio de uma fórmula como

$$\forall x((Ax \wedge \neg Px) \rightarrow Fx)$$

(onde A representa 'x é uma ave'; P representa 'x é um pingüim'; e F, 'x voa'). Essa fórmula, tomada como premissa de um argumento como (A4), de fato permite deduzir que Tweety não voa, se sabemos que ele é uma ave e um pingüim — mas não nos autoriza a fazer nada no caso contrário! Isto é, se a tivermos como premissa de (A3), não teremos como deduzir que Tweety voa.

Um segundo problema, relacionado a isso, é de que a lista de exceções é interminável. Por exemplo, é óbvio que Tweety não voa se Tweety é um avestruz, ou está com a asa quebrada, ou tem os pés presos num balde de concreto, ou está sendo justamente grelhado, ou ... Ou seja, nossa fórmula seria algo como

$$\forall x((Ax \wedge \neg Px \wedge \neg Ox \wedge \neg Qx \wedge \neg Cx \wedge \neg Gx \wedge \ldots) \rightarrow Fx).$$

Para um outro exemplo de inferência com informação incompleta, consideremos o banco de dados (vamos chamá-lo de Δ) de uma companhia aérea qualquer. Suponhamos que um usuário coloque a seguinte questão:

Q: Há um vôo direto ente Florianópolis e Timbuctu?

Se a existência dessa conexão não consta de Δ, é obvio que $\Delta \nvdash Q$. Podemos então dizer que $\Delta \vdash \neg Q$? Isto é, que Δ deduz não-monotonicamente $\neg Q$? Esse esquema de inferência é conhecido como a hipótese do mundo fechado (fechado porque supomos que tudo o que é verdadeiro é o expresso pela informação disponível, e nada além disso).

O raciocínio envolvido na hipótese do mundo fechado é uma espécie de raciocínio não-monotônico, pois acréscimos a Δ podem conduzir à invalidação de uma inferência feita. Por exemplo, se acrescentarmos ao banco de dados a informação nova de que foi justamente

inaugurado um vôo direto entre Florianópolis e Timbuctu, $\neg Q$ não mais poderá ser deduzida de Δ.

As conseqüências imediatas das questões acima são: primeiro, o desenvolvimento de lógicas que formalizem raciocínios de senso comum, mesmo com falhas. (Significa isso dizer que a lógica é *descritiva*, ou seja, descreve como as pessoas raciocinam, ao invés de *prescritiva*, isto é, dá as normas de como as pessoas deviam raciocinar?) Segundo, vemos que se faz necessário investigar mais os padrões de inferência não-dedutivos, como raciocínio analógico, indutivo, probabilístico, e assim por diante, que foram negligenciados pela lógica clássica.

Para finalizar esse passeio pela lógica, note que, do exposto anteriormente, algumas questões ainda sem resposta se colocam. Por exemplo, o que é, afinal, uma lógica? Pode haver uma lógica correta (com relação a uma idéia extra-sistemática de validade)? E, nesse caso, teríamos apenas uma lógica correta, ou quem sabe mais de uma? E como saber, afinal, se uma lógica é correta? Ou será que, ao contrário, não faz sentido falar de correção de uma lógica? (As lógicas seriam, neste caso, simplesmente ferramentas, adequadas, ou não, a certas tarefas?) Além do mais, faz sentido falar em lógica não-dedutiva, como parecem sugerir os desenvolvimentos sobre raciocínio não-monotônico?

É claro que, estando as coisas nessa situação, com tantos problemas interessantes ainda por resolver (e a suscitar novos problemas), as perspectivas de mercado de trabalho para os lógicos são fantásticas! Quem sabe você não se aventura também por esses caminhos?

BIBLIOGRAFIA

ALLWOOD, J. et al. *Logic in Linguistics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

ANDERSON, A. R. A., BELNAP, N. D. *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity*. Princeton: Princeton University Press, 1975. v.1.

BARWISE, J. (Ed.) *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland, 1993.

BARWISE, J., ETCHEMENDY, J. *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*. New York: Oxford University Press, 1987.

CERQUEIRA, L. A., OLIVA, A. *Introdução à Lógica*. Rio: Zahar, 1972.

CHELLAS, B. F. *Modal Logic: an Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

CHOMSKY, N. *Syntactic Structures*. The Hague: Mouton, 1957.

COPI, I. M. *Introdução à Lógica*. Rio: Zahar, 1972.

DA COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da Lógica*. São Paulo: Hucitec/Edusp, 1980.

EBBINGHAUS, H.-D. et al. *Zahlen*. 2.ed. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1988.

FAGIN, R., HALPERN, J., MOSES, Y., VARDI, M. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge: MIT Press, 1995.

FITTING, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. New York, Berlin: Springer Verlag, 1990.

GABBAY, D., GUENTHNER, F. *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: D. Reidel, 1984–1987. 4v.

GALLIER, J. H. *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*. New York: Harper & Row, 1986.

GENESERETH, M. R., NILSSON, N. J. *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Palo Alto, Cal.: Morgan Kaufmann, 1988.

GOLDBLATT, R. *Logics of Time and Computation*. Stanford: CSLI Lecture Notes, 1987.

HAACK, S. *Philosophy of Logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

HOFSTADTER, D. R. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. New York: Vintage Books, 1980.

HUGHES, G. E., CRESSWELL, M. J. *A New Introduction to Modal Logic*. London, New York: Routledge, 1996.

JEFFREY, R. *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill, 1981.

KALISH, D., MONTAGUE, R. *Logic: Techniques of Formal Reasoning*. New York: Harcourt, Brace & World, Inc., 1964.

KNEALE, W., KNEALE, M. *O desenvolvimento da Lógica*. Lisboa: Fundação Gulbenkian, 1980.

KOWALSKI, R. *Logic for Problem Solving*. New York: Elsevier Science Pub. Co., 1979.

LENZEN, W. *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit: Systeme der epistemischen Logik*. Wien, New York: Springer Verlag, 1980.

LOUX, M. J. (Ed.) *The Possible and the Actual. Readings in the Metaphysics of Modality*. Ithaca: Cornell University Press, 1979.

MATES, B. *Lógica elementar*. São Paulo: Ed. Nacional e Edusp, 1967.

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. 2.ed. New York: D. Van Nostrand, 1979.

NOLT, J., ROHATYN, D. *Lógica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

PRIOR, A. N. *Time and Modality*. Oxford: Clarendon Press, 1957.

______. *Past, Present, and Future*. Oxford: Clarendon Press, 1967.

QUINE, W. V. O. "On What There Is". *From a Logical Point of View*. 2.ed., revisada. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1980, p.1–19. (Há tradução brasileira no volume de escritos de Quine na coleção *Os Pensadores*, São Paulo: Abril Cultural.)

ROGERS, R. *Mathematical Logic and Formalized Theories*. Amsterdam: North-Holland, 1971.

RUSSELL, B. "On denoting". *Logic and knowledge*. London: Unwin-Hyman, 1956, p.39–56. (Há tradução brasileira no volume de escritos de Russell na coleção *Os Pensadores*, São Paulo: Abril Cultural.)

SALMON, W. C. *Lógica*. Rio: Zahar, 1973.

SMULLYAN, R. *First-Order Logic*. Amsterdam: North-Holland, 1971.

TARSKI, A. *Logic, Semantic, Metamathematics*. 2.ed. Indianapolis: Hackett Publishing Co., 1983.



O objetivo do Programa é estimular a publicação e a distribuição de livros-textos, obras de referência e outras que contribuam diretamente para a formação inicial e continuada de professores.

Veja como funciona

O Programa será desenvolvido com o apoio do Comitê de Produtores da Informação Educacional (Comped) na reprodução dos materiais aprovados, segundo as seguintes condições:

1) Terão preferência as editoras universitárias de Instituições de Ensino Superior mantidas pelo setor público.
2) Não serão aceitas obras que se caracterizem como estudo de caso, dissertação ou tese sem as devidas modificações para adequá-las ao público-alvo do Programa.
3) É permitida a co-edição das obras aprovadas com outras editoras.
4) As obras a serem encaminhadas ao Programa devem ser previamente selecionadas e aprovadas pelos respectivos Conselhos Editoriais.
5) Só serão aceitas reedições de obras comprovadamente esgotadas há, no mínimo, dois anos.
6) Não há limite de envio de propostas por editora ou por processo de seleção. Entretanto, cada editora poderá ter contratadas para reprodução, no máximo, 3 (três) obras por ano.
7) Cada volume de uma mesma obra é considerado como uma proposta independente.
8) Para cada reprodução apoiada, deverá ser enviada ao INEP uma cota de 1.000 exemplares, para distribuição às bibliotecas universitárias, às unidades acadêmicas, às editoras participantes do Programa e, por solicitação, a outras instituições interessadas, até esgotar a referida cota.
9) Para cada obra a ser reproduzida nos termos do Programa será elaborado instrumento contratual específico, indicando todas as condições a serem seguidas pelas partes. A Editora Universitária responsabilizar-se-á por todos os custos de edição da obra apoiada, além da prestação de contas e outras exigências que se fizerem necessárias.

Maiores informações e calendário consultar:

http://www.inep.gov.br/comped/default.htm
E-mail: comped@inep.gov.br

Endereço: Secretaria Executiva do Comped
Centro de Informações e Biblioteca em Educação – CIBEC
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, Térreo
CEP 70047-900 Brasília – DF
Telefones: (0xx61) 410-9055 ou 323-5510